Universität Siegen
Department Mathematik
AG Geomathematik
Univ.-Prof. Dr. V. Michel
B. Kretz, M.Sc.

23. November 2020

Übungen zur Vorlesung

Mathematische Modelle der Erdbebenforschung

Wintersemester 2020/21
Blatt 4

Abgabe bis Montag, den 30. November 2020, 14 Uhr per E-Mail.

Aufgabe 13: (4 Punkte)

Beweisen Sie die folgenden Eigenschaften des Levi–Cività–Symbols ε_{ijk}:

(a) $\sum_{i=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}$,

(b) $\sum_{i,j=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijn} = 2\delta_{kn}$,

(c) $\sum_{i,j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = 6$.

Aufgabe 14: (4 Punkte)

Seien $f, g \in \mathrm{C}^{(1)}(D, \mathbb{R}^3)$ und $U \in \mathrm{C}^{(1)}(D, \mathbb{R})$ gegebene Funktionen, wobei $D \subset \mathbb{R}^3$ offen ist. Beweisen Sie die folgenden Identitäten:

a) $\mathrm{div}(f \times g) = g \cdot (\mathrm{rot}\ f) - f \cdot (\mathrm{rot}\ g)$,

b) $\mathrm{rot}(Uf) = U\mathrm{rot}\ f + (\mathrm{grad}\ U)^{\mathrm{T}} \times f$,

c) $\mathrm{rot}(f(X) \times X) = (\nabla f(X)) \cdot X + 2f(X) - (\mathrm{div} f(X))X$.

Aufgabe 15: (4 Punkte)

Seien $f \in \mathrm{C}^{(2)}(D, \mathbb{R}^3)$ und $U \in \mathrm{C}^{(2)}(D, \mathbb{R})$ gegebene Funktionen, wobei $D \subset \mathbb{R}^3$ offen ist. Beweisen Sie die folgenden Identitäten:

a) $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\ U)^{\mathrm{T}} = 0$

b) $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\ f) = 0$.

Aufgabe 16: (4 Punkte)

Seien $a, b \in \mathbb{R}^3$ beliebige Vektoren. Lösen Sie die folgenden Probleme unter Verwendung des Levi-Cività–alternierenden Symbols:

a) Zeigen Sie, dass $a \times a = 0$ gilt.

b) Beweisen Sie, dass $a \perp (a \times b)$ und $b \perp (a \times b)$ gilt.