

Übungen zur Vorlesung  
**Mathematische Modelle der Erdbebenforschung**  
Wintersemester 2020/21  
Blatt 5

Abgabe bis Montag, den 07. Dezember 2020, 14 Uhr per E-Mail.

**Aufgabe 17:** (4 Punkte)

Seien  $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$  und  $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$  Banachräume,  $\mathcal{U} \subset \mathcal{X}$  eine offene Teilmenge und  $f, g : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{Y}$  gegebene Abbildungen. Zeigen Sie, dass  $f + g$  in  $x_0 \in \mathcal{U}$  differenzierbar ist, wenn  $f$  und  $g$  in  $x_0 \in \mathcal{U}$  differenzierbar sind. Zeigen Sie ferner, dass die Fréchet–Ableitung von  $f + g$  in  $x_0$  gegeben ist durch

$$D(f + g)(x_0) = Df(x_0) + Dg(x_0) .$$

**Aufgabe 18:** (4 Punkte)

Der Operator  $\wedge$  bildet Operatoren 2. Stufe  $T$  auf Vektoren  $\wedge T$  wie folgt ab:

$$\wedge T := \text{tr}_{23} \text{tr}_{35} (\Lambda \otimes T),$$

wobei die Komponenten des Tensors 3. Stufe  $\Lambda$  durch das Levi–Civita–Symbol  $\varepsilon_{ijk}$  (siehe Aufgabe 12) gegeben sind.

a) Beweisen Sie:

$$\wedge T = \left( \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} T_{jk} \right)_{i=1,2,3} .$$

b) Seien  $f, g \in \mathbb{R}^3$  beliebige Vektoren. Bestimmen Sie  $\wedge(f \otimes g)$ .

**Aufgabe 19:** (4 Punkte)

Die Tensoren  $a, b, S$  und  $T$  seien (bezüglich einer gewählten Basis) wie folgt definiert:

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

- a) Welche Stufen haben diese Tensoren?
- b) Berechnen Sie  $a : b, S : T, T : a$  und  $S : b$ .
- c) Bestimmen Sie die Spuren von  $S$  und  $T$ .

**Aufgabe 20:** (4 Punkte)

Die Tensoren  $a, b, S$  und  $T$  seien wie in Aufgabe 19 gegeben.

- a) Berechnen Sie  $a \otimes b, b \otimes a, a \times b$  und  $b \times a$ .
- b) Berechnen Sie  $S \otimes a$  und  $S \otimes T$ .
- c) Berechnen Sie die folgenden Kontraktionen:

$$\text{tr}_{13}(S \otimes a), \text{tr}_{24}(S \otimes T).$$