Universität Siegen
Department Mathematik
AG Geomathematik
Univ.-Prof. Dr. V. Michel
B. Kretz, M.Sc.

07. Dezember 2020

Übungen zur Vorlesung

Mathematische Modelle der Erdbebenforschung

Wintersemester 2020/21
Blatt 6

Abgabe bis Montag, den 14. Dezember 2020, 14 Uhr per E-Mail.

Aufgabe 21: (4 Punkte)

Ein Tensor T der Stufe $q \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ heißt isotrop, wenn für jede orthogonale 3×3–Matrix R, d.h. $R^{\mathrm{T}} = R^{-1}$, Folgendes gilt:

$$T(Ru_1, \ldots, Ru_q) = T(u_1, \ldots, u_q) \quad \forall u_1, \ldots, u_q \in \mathbb{R}^3.$$

Zeigen Sie, dass ein isotroper Tensor der Stufe 2 stets die folgende Form hat:

$$T = \lambda I,$$

wobei $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt und I die Identität ist.

Aufgabe 22: (3+1 Punkte)

Sei U eine Verschiebung in $\mathrm{C}^{(1)}$. Hierzu definieren wir

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(U) &:= \frac{1}{2}\left(\nabla_X U + (\nabla_X U)^{\mathrm{T}}\right), \\ \mathcal{R}(U) &:= \frac{1}{2}\left(\nabla_X U - (\nabla_X U)^{\mathrm{T}}\right). \end{aligned}$$

a) Beweisen Sie:
$$\mathcal{R}(U) = \frac{1}{2}(\mathrm{rot}\ U) \times I.$$

b) Geben Sie eine Rechtfertigung für die folgende Approximation an:
$$F \simeq I + \mathcal{E} + \mathcal{R}.$$

Aufgabe 23: (4 Punkte)

W sei definiert durch

$$W(C) = \alpha_0 + \Upsilon : C + \frac{1}{2}\Gamma : (C \otimes C),$$

wobei α_0, Υ und Γ Tensoren der Stufen 0, 2 bzw. 4 sind. Bestimmen Sie den zweiten Piola–Kirchhoff'schen Spannungstensor S und den zweiten Elastizitätstensor Ξ.

Aufgabe 24: (4 Punkte)

Sei $F \in \mathrm{C}^{(2)}(\mathbb{R}^3 \backslash \{0\}, \mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass die Hessematrix von F wie folgt dargestellt werden kann:

$$\begin{aligned}(\nabla_X \otimes \nabla_X)F(X) \quad = \quad & \xi \otimes \xi \frac{\partial^2}{\partial r^2} F(r\xi) + \xi \otimes \nabla^*_\xi \left(-\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} \right) F(r\xi) \\ & + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} \left(I - \xi \otimes \xi\right) F(r\xi) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} \left(\nabla^*_\xi F(r\xi)\right) \otimes \xi \\ & + \frac{1}{r^2} \nabla^*_\xi \otimes \nabla^*_\xi F(r\xi),\end{aligned}$$

wobei $X = r\xi \in \mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$, $r \in \mathbb{R}^+$, $\xi \in \Omega$ und ∇^* der Oberflächengradient auf der Sphäre ist (siehe Konstruktive Approximation).