Universität Siegen
Department Mathematik
AG Geomathematik
Univ.-Prof. Dr. V. Michel
B. Kretz, M.Sc.

04. Januar 2021

Übungen zur Vorlesung

Mathematische Modelle der Erdbebenforschung

Wintersemester 2020/21
Blatt 8

Abgabe bis Montag, den 11. Januar 2021, 14 Uhr per E-Mail.

Aufgabe 29: (4 Punkte)

Sei nun $F \in \mathrm{C}^{(2)}(\mathbb{R}^3 \backslash \{0\}, \mathbb{R})$ dargestellt als

$$F(r\xi) = G(r)Y(\xi); \quad r \in \mathbb{R}^+, \xi \in \Omega;$$

wobei $G \in \mathrm{C}^{(2)}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, $Y \in \mathrm{C}^{(2)}(\Omega, \mathbb{R})$. Schließen Sie nun, dass das Produkt aus der Hessematrix von F und $\xi \in \Omega$ folgendes ergibt:

$$((\nabla_X \otimes \nabla_X)\, F(X))\, \xi = \frac{d^2}{dr^2} G(r) \xi Y(\xi) + \frac{1}{r} \left(\frac{d}{dr} G(r) - \frac{1}{r} G(r) \right) \nabla_\xi^* Y(\xi),$$

wobei $X = r\xi$, $r \in \mathbb{R}^+$ und $\xi \in \Omega$.

Aufgabe 30: (4 Punkte)

Sei $n \in \Omega$ und $U \in \mathrm{C}^{(1)}(\mathcal{E}, \mathbb{R}^3)$. Beweisen Sie, dass

$$\left(\nabla_X U + (\nabla_X U)^{\mathrm{T}} \right) n = 2 \frac{\partial U}{\partial n} + n \times \mathrm{rot}\ U$$

gilt.

Aufgabe 31: (4 Punkte)

Betrachten Sie ein (nur) radial heterogenes Medium, d.h. die Lamé–Parameter und die Massendichte sind Funktionen von r: "$\rho_0 = \rho_0(r)$, $\lambda = \lambda(r)$, $\mu = \mu(r)$". Zeigen Sie, dass die Cauchy–Navier–Gleichung in diesem Fall folgende Form annimmt:

$$\mu \Delta U + (\lambda + \mu)(\mathrm{grad\ div}\ U)^{\mathrm{T}} + \frac{d\lambda}{dr}(\mathrm{div} U)\varepsilon^r + \frac{d\mu}{dr} \left(2 \frac{\partial U}{\partial r} + \varepsilon^r \times \mathrm{rot}\ U \right) + \rho_0 B = \rho_0 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}.$$

Aufgabe 32: (4 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass der erste Piola–Kirchhoff'sche Spannungstensor $P = \Gamma : \nabla_X U$ mit isotropem Elastiziätstensor Γ im Fall einer P–Welle durch

$$P_{\mathrm{P}}(X,t) = \varphi'(X \cdot k - ct)(\lambda\ \alpha \cdot k\ I + 2\mu\ \alpha \otimes k)$$

bzw. im Fall einer S–Welle durch

$$P_{\mathrm{S}}(X,t) = \varphi'(X \cdot k - ct)\mu(\alpha \otimes k + k \otimes \alpha)$$

gegeben ist (Notationen siehe Vorlesung).

b) Beschränken Sie sich nun auf Ausbreitungsrichtungen k, die in der X_1–X_3–Ebene liegen. Ein Erdbeben verursache P-Wellen in Richtung k der folgenden Form

$$U_{\mathrm{P}}(X,t) = \vartheta_{\mathrm{P}} k \cos\left(\frac{\omega}{c_{\mathrm{P}}}(X \cdot k - c_{\mathrm{P}} t)\right).$$

Ferner erzeuge es S–Wellen in Richtung k, die in eine so genannte vertikale S–Welle

$$U_{\mathrm{SV}}(X,t) = \vartheta_{\mathrm{SV}}(e_2 \times k) \cos\left(\frac{\omega}{c_{\mathrm{S}}}(X \cdot k - c_{\mathrm{S}} t)\right)$$

und eine so genannte horizontale S–Welle

$$U_{\mathrm{SH}}(X,t) = \vartheta_{\mathrm{SH}} e_2 \cos\left(\frac{\omega}{c_{\mathrm{S}}}(X \cdot k - c_{\mathrm{S}} t)\right) \ ,$$

zerlegt werden können, wobei $\vartheta_{\mathrm{P}}, \vartheta_{\mathrm{SV}}, \vartheta_{\mathrm{SH}}, \omega \in \mathbb{R}$ Konstanten sind und $e_2 = (0,1,0)^{\mathrm{T}}$. Bestimmen Sie den ersten Piola–Kirchhoff'schen Spannungstensor für diese drei Wellen.