

Übungen zur Vorlesung
Mathematische Modelle der Erdbebenforschung
Wintersemester 2020/21
Blatt 9

Abgabe bis Montag, den 18. Januar 2021, 14 Uhr per E-Mail.

Aufgabe 33: (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass

$$L_{n,j}(r\xi) := \frac{d}{dr} j_n \left(\frac{\omega}{\alpha} r \right) y_{n,j}^{(1)}(\xi) + \frac{1}{r} j_n \left(\frac{\omega}{\alpha} r \right) \sqrt{n(n+1)} y_{n,j}^{(2)}(\xi),$$

$n \in \mathbb{N}_0$, $j = \dots, 2n+1$, $r \in \mathbb{R}^+$, $\xi \in \Omega$, die Helmholtz-Gleichung

$$\Delta L_{n,j} + \frac{\omega^2}{\alpha^2} L_{n,j} = 0$$

erfüllt, wenn $F_n(r) = j_n\left(\frac{\omega}{\alpha} r\right)$ für alle $r \in \mathbb{R}^+$ gesetzt wird.

Aufgabe 34: (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass

$$N_{n,j}(r\xi) := \left(r \frac{d^2}{dr^2} + 2 \frac{d}{dr} + \frac{\omega^2}{\beta^2} r \right) j_n \left(\frac{\omega}{\beta} r \right) y_{n,j}^{(1)}(\xi) + \left(\frac{1}{r} + \frac{d}{dr} \right) j_n \left(\frac{\omega}{\beta} r \right) \sqrt{n(n+1)} y_{n,j}^{(2)}(\xi),$$

$n \in \mathbb{N}_0$, $j = 1, \dots, 2n+1$, $r \in \mathbb{R}^+$, $\xi \in \Omega$, die Helmholtz-Gleichung

$$\Delta N_{n,j} + \frac{\omega^2}{\beta^2} N_{n,j} = 0$$

erfüllt, wenn $F_n(r) = j_n\left(\frac{\omega}{\beta} r\right)$ für alle $r \in \mathbb{R}^+$ gesetzt wird.

Aufgabe 35: (1+3 Punkte)

Die n -te sphärische Besselfunktion j_n erfüllt die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 j_n}{dx^2}(x) + \frac{2}{x} \frac{dj_n}{dx}(x) + \left(1 - \frac{n(n+1)}{x^2}\right) j_n(x) = 0 . \quad (1)$$

- a) Zeigen Sie, dass die Substitution $F_n(r) = j_n\left(\frac{\omega}{c}r\right)$ zu der folgenden Differentialgleichung führt:

$$\frac{d^2 F_n}{dr^2}(r) + \frac{2}{r} \frac{dF_n}{dr}(r) + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{n(n+1)}{r^2}\right) F_n(r) = 0 .$$

- b) Zeigen Sie, dass $j_0(x) = \frac{\sin x}{x}$ und $j_1(x) = \frac{1}{x} \left(\frac{\sin x}{x} - \cos x\right)$ für $x \neq 0$ Gleichung (1) für $n = 0$ beziehungsweise $n = 1$ erfüllen.

Aufgabe 36: (4 Punkte)

Es gilt $j_2(x) = \left(\frac{3}{x^2} - 1\right) \frac{\sin x}{x} - \frac{3}{x^2} \cos x$ für $x \neq 0$.

- a) Zeigen Sie, dass die toroidale Frequenzgleichung

$$\mathcal{X} j_{n+1}(\mathcal{X}) = (n-1) j_n(\mathcal{X})$$

im Fall eines (schichtweise) homogenen sphärischen Erdmodells für $n = 1$ (colatitudinal mode number) wie folgt geschrieben werden kann:

$$\frac{\tan \mathcal{X}}{\mathcal{X}} = \frac{3}{3 - \mathcal{X}^2} . \quad (2)$$

- b) Bestimmen Sie näherungsweise die kleinste positive Lösung von (2).