Universität Siegen
Department Mathematik
AG Geomathematik
Univ.-Prof. Dr. V. Michel

11. Dezember 2014

Übungen zur Vorlesung

Mathematische Modelle der Erdbebenforschung

Wintersemester 2014/15
Blatt 10

Abgabe zu Beginn der Vorlesung am Donnerstag, den 18. Dezember 2014

Aufgabe 37: (4 Punkte)

Sei $C = (c_{ij})_{i,j=1,2,3}$ eine beliebige Matrix.

a) Zeigen Sie, dass
$$\sum_{m,n=1}^{3} \varepsilon_{jmn}\, c_{2m}\, c_{3n} = (-1)^{1+j} \det(C_{1,j})$$
gilt, wobei $C_{1,j}$ die 2×2–Matrix ist, die durch Streichen der 1. Zeile und der j–ten Spalte von C entsteht.

b) Verwenden Sie die übliche Definition einer Determinante, d.h.
$$\det C = \sum_{l,m,n=1}^{3} \varepsilon_{lmn}\, c_{1l}\, c_{2m}\, c_{3n},$$
um zu zeigen, dass die Ableitung der Abbildung $C \mapsto \det C$ wie folgt aussieht:
$$\frac{\partial(\det C)}{\partial C} = (\det C)(C^{-1})^{\mathrm{T}} \;.$$

Aufgabe 38: (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Jacobi–Determinante $\phi_t \mapsto J(\phi_t) = \det\left(\frac{\partial \phi_t}{\partial X}\right)$ wie folgt linearisiert werden kann:
$$J(\phi_0 + U) \simeq 1 + \operatorname{div}\, U \;.$$

Aufgabe 39: (4 Punkte)

a) Beweisen Sie den folgenden Satz:
Sei $\mathcal{X}$ ein Banachraum und $T : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ ein linearer, stetiger Operator mit $\|T\|_{\mathcal{L}} < 1$. Dann ist die Neumann–Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} T^k$$

konvergent in $\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{X})$. Ferner ist der Operator $I - T$ invertierbar, und es gilt

$$(I - T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k \ .$$

b) Begründen Sie, warum die Inverse des Deformationsgradienten F mittels

$$F^{-1} \simeq I - \nabla U,$$

linearisiert werden kann, wenn $\|\nabla_X U\|$ hinreichend klein ist.

Aufgabe 40: (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass das folgende System orthonormal und rechtshändig ist, d.h . $\varepsilon^r \times \varepsilon^\vartheta = \varepsilon^\varphi$:

$$\begin{aligned}
\varepsilon^r(\varphi, \vartheta) &= \begin{pmatrix} \sin\vartheta \ \cos\varphi \\ \sin\vartheta \ \sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}, \\
\varepsilon^\vartheta(\varphi, \vartheta) &= \begin{pmatrix} \cos\vartheta \ \cos\varphi \\ \cos\vartheta \ \sin\varphi \\ -\sin\vartheta \end{pmatrix}, \\
\varepsilon^\varphi(\varphi, \vartheta) &= \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} .
\end{aligned}$$