Universität Siegen
Department Mathematik
AG Geomathematik
Univ.-Prof. Dr. V. Michel

15. Dezember 2014

Übungen zur Vorlesung

Mathematische Modelle der Erdbebenforschung

Wintersemester 2014/15
Blatt 11

Abgabe zu Beginn der Vorlesung am Dienstag, den 13. Januar 2015

Aufgabe 41: (4 Punkte)

Sei $\{\varepsilon^1, \varepsilon^2, \varepsilon^3\}$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^3$. Die Basis $\{a^1, a^2, a^3\}$ sei gegeben durch $a^j = R\varepsilon^j$, $j \in \{1, 2, 3\}$, wobei R eine orthogonale 3×3–Matrix ist, d.h. $R^{\mathrm{T}} = R^{-1}$.
Eine 3×3–Matrix M kann in beiden Basen dargestellt werden:

$$M = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} m_{ij} \varepsilon^i \otimes \varepsilon^j, \quad M = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} m_{ij}^a a^i \otimes a^j \quad .$$

a) Zeigen Sie, dass $\{a^1, a^2, a^3\}$ auch ein Orthonormalsystem im $\mathbb{R}^3$ ist.

b) Beweisen Sie, dass das Doppelpunktprodukt $M : M$ basisunabhängig ist, d.h.

$$M : M = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \left(m_{ij}^a\right)^2 \quad .$$

c) Ist die Spur auch unabhängig von solchen Koordinatentransformationen?

Aufgabe 42: (4 Punkte)

Die Funktionen f_k: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, seien gegeben durch

$$f_k(t) := \begin{cases} k, & \text{wenn } 0 < t \leq 1/k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad .$$

a) Zeigen Sie, dass $(f_k)_{k=1,2,\ldots}$ punktweise aber nicht gleichmäßig konvergent ist. Bestimmen Sie $\lim\limits_{k \to \infty} f_k(t)$, $t \in \mathbb{R}$.

b) Sei $\mathcal{F}_k$ die reguläre Distribution zu f_k, $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Zeigen Sie, dass $\lim\limits_{k \to \infty} \mathcal{F}_k = \delta_0$ in $\mathcal{D}^*(\mathbb{R})$ gilt.

Aufgabe 43: (4 Punkte)

Nach Angaben des United States Geological Survey (USGS) hatte der Momententensor eines Erdbebens bei El Salvador (Epizentrum: 12.767° N, 88.827° W; Tiefe: 39 km) am 13. Januar 2001, 17:33:31.35 UTC, die folgenden (Polar-)Komponenten

$$M_{rr} = -3.01,\ M_{\vartheta\vartheta} = 1.36,\ M_{\varphi\varphi} = 1.65,\ M_{r\vartheta} = 0.57,\ M_{r\varphi} = 0.34,\ M_{\vartheta\varphi} = -1.64$$

mit der Skala 10^{20} Nm.
Bestimmen Sie M_0 und die Magnitude M_W für dieses Beben.

Aufgabe 44: (4 Punkte)

Sei

$$U(X,\omega) := e^{-i\omega\Psi(X)} \sum_{n=0}^{\infty} (i\omega)^{-n} \xi_n(X); \quad i^2 = -1;$$

wobei $\Psi, \xi_n \in \mathrm{C}^{(2)}(\mathcal{E}, \mathbb{R})$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\xi_0(X) \neq 0$ für alle $X \in \mathcal{E}$ gelte. Ferner nehmen wir an, dass die Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} (i\omega)^{-n} \frac{\partial^k}{\partial X_j^k} \xi_n; \quad j \in \{1,2,3\}, k \in \{0,1,2\};$$

gleichmäßig konvergent sind. Beweisen Sie: Die Anwendung dieses Ansatzes auf die Helmholtz–Gleichung

$$\Delta U + \frac{\omega^2}{(V(r))^2}\, U = 0, \qquad r = |X|,$$

führt zu den Differentialgleichungen

$$|\nabla\Psi|^2 = \frac{1}{V^2}$$

und

$$2(\nabla\Psi) \cdot (\nabla\xi_n) + \xi_n \Delta\Psi = \Delta\xi_{n-1}, \quad n \geq 0,$$

wobei $\xi_{-1} := 0$ gesetzt wurde.