Universität Siegen
Department Mathematik
AG Geomathematik
Univ.-Prof. Dr. V. Michel

14. Oktober 2014

Übungen zur Vorlesung

Mathematische Modelle der Erdbebenforschung

Wintersemester 2014/15
Blatt 2

Abgabe zu Beginn der Vorlesung am Donnerstag, den 23. Oktober 2014

Aufgabe 5: (4 Punkte)

Sei $\mathcal{B} := \Omega_{\text{int}} := \{X \in \mathbb{R}^3 \mid |X| < 1\}$ und

$$\Phi_t(X) := \begin{pmatrix} X_1(1+t) \\ X_2(1+t^2) \\ X_3(1+2t) \end{pmatrix}, \quad X \in \mathcal{B},\ t \in \mathbb{R}_0^+ .$$

(a) Prüfen Sie, ob Φ die allgemeine Annahme an Bewegungen erfüllt.

(b) Zeigen Sie, dass für diese Bewegung

$$\frac{\partial J(X,t)}{\partial t} = (\operatorname{div}_x v(\Phi_t(X),t))J(X,t) \quad \forall X \in \mathcal{B}\ \forall t \in \mathbb{R}_0^+$$

gilt, indem Sie beide Seiten berechnen.

Aufgabe 6: (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass für den Deformationsgradienten F die Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}F(X,t) = \frac{\partial}{\partial x}v(\Phi_t(X),t)F(X,t)$$

für alle $X \in \mathcal{B}$ und alle $t \in \mathbb{R}$ gilt.

Aufgabe 7: (4 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass Massenerhaltung ein Spezialfall des allgemeinen Erhaltungsgesetzes ist.

b) Nehmen Sie an, dass $\rho \in \mathrm{C}^{(1)}$ gilt und wenden Sie den räumlichen Lokalisierungssatz auf die Massenerhaltung an. Wandeln Sie dann Ihr Ergebnis in die Materialform um, wobei die Lagrange'sche Dichtefunktion mit ρ^{L} bezeichnet wird.

Aufgabe 8: (4 Punkte)

Die Impulserhaltung werde durch $\Phi \in \mathrm{C}^{(2)}$, $\rho \in \mathrm{C}^{(1)}$, $b \in \mathrm{C}^{(0)}$ und $\mathbf{t} \in \mathrm{C}^{(0)}$ erfüllt, wobei $\Phi_t = \mathrm{Id}$ für alle $t \in \mathbb{R}$ (stationärer Fall) und

$$\mathbf{t}(x,t,n) := \begin{pmatrix} x_1 n_1 + e^t \log(t^2+1)\sin(x_3)n_2 - \sqrt{t^4+5}\cos(x_2)n_3 \\ \sinh\left(\sqrt{x_2^2+x_3^2+\pi}\right) n_1 + 2x_2 n_2 + \frac{3}{7}\cos(t)x_2^{107}x_1^4 n_3 \\ \sqrt{t^{502}+4.5}\,\log\left(x_3^4+x_2^6+8.01\right) n_1 - t^4 x_1^7 n_2 - x_3 n_3 \end{pmatrix}$$

für alle $x \in \Phi_t(\mathcal{B})$, $t \in \mathbb{R}$ und $n \in \Omega$ gilt. Ferner sei $\mathcal{B} = \overline{\Omega_{\text{int}}}$ die abgeschlossene Einheitskugel. Berechnen Sie die gesamte Oberflächenkraft, die auf $\partial\Phi_t(\mathcal{B})$ zu jedem Zeitpunkt $t \in \mathbb{R}$ und die gesamte Volumenkraft, die auf $\Phi_t(\mathcal{B})$ zu jedem Zeitpunkt $t \in \mathbb{R}$ ausgeübt wird.