Universität Siegen
Department Mathematik
AG Geomathematik
Univ.-Prof. Dr. V. Michel

05. November 2014

Übungen zur Vorlesung

Mathematische Modelle der Erdbebenforschung

Wintersemester 2014/15
Blatt 5

Abgabe zu Beginn der Vorlesung am Donnerstag, den 13. November 2014.

Aufgabe 17: (4 Punkte)

Ein Tensor T der Stufe $q \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ heißt isotrop, wenn für jede orthogonale 3×3–Matrix R, d.h. $R^{\mathrm{T}} = R^{-1}$, Folgendes gilt:

$$T(Ru_1, \ldots, Ru_q) = T(u_1, \ldots, u_q) \quad \forall u_1, \ldots, u_q \in \mathbb{R}^3.$$

Zeigen Sie, dass ein isotroper Tensor der Stufe 2 stets die folgende Form hat:

$$T = \lambda I,$$

wobei $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt und I die Identität ist.

Aufgabe 18: (4 Punkte)

Beweisen Sie die folgenden Eigenschaften des Levi–Cività–Symbols ε_{ijk}:

(a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}$,

(b) $\displaystyle\sum_{i,j=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijn} = 2\delta_{kn}$,

(c) $\displaystyle\sum_{i,j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = 6$.

Aufgabe 19: (3+1 Punkte)

Sei U eine Verschiebung in $\mathrm{C}^{(1)}$. Hierzu definieren wir

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(U) &:= \frac{1}{2}\left(\nabla_X U + (\nabla_X U)^{\mathrm{T}}\right),\\ \mathcal{R}(U) &:= \frac{1}{2}\left(\nabla_X U - (\nabla_X U)^{\mathrm{T}}\right).\end{aligned}$$

a) Beweisen Sie:

$$\mathcal{R}(U) = \frac{1}{2}(\mathrm{rot}\ U) \times I.$$

b) Geben Sie eine Rechtfertigung für die folgende Approximation an:

$$F \simeq I + \mathcal{E} + \mathcal{R}.$$

Aufgabe 20: (4 Punkte)

$\hat{E}$ sei definiert durch

$$\hat{E}(C) = \alpha_0 + \Upsilon : C + \frac{1}{2}\Gamma : (C \otimes C),$$

wobei α_0, Υ und Γ Tensoren der Stufen 0, 2 bzw. 4 sind. Bestimmen Sie den zweiten Piola–Kirchhoff'schen Spannungstensor S und den zweiten Elastizitätstensor Ξ.