Universität Siegen
Department Mathematik
AG Geomathematik
Univ.-Prof. Dr. V. Michel

13. November 2014

Übungen zur Vorlesung

Mathematische Modelle der Erdbebenforschung

Wintersemester 2014/15
Blatt 6

Abgabe zu Beginn der Vorlesung am Donnerstag, den 20. November 2014

Sei S der 2. Piola–Kirchhoff'sche Spannungstensor, $U \in \mathrm{C}^{(2)}$ eine kleine Verschiebung, W die Funktion der gespeicherten Energie und $\mathcal{E}$ der Material–Verzerrungstensor, wobei $\mathcal{E} \simeq \frac{1}{2}(\nabla_X U + (\nabla_X U)^{\mathrm{T}})$. Der 2. Elastizitätstensor Ξ sei ferner isotrop, d.h.

$$\Xi_{ijkl} = \frac{1}{2}\lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \frac{1}{2}\mu\left(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}\right),$$

und es gelte des Hooke'sche Gesetz.

Aufgabe 21: (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass

$$\operatorname{tr} S \simeq (3\lambda + 2\mu)\operatorname{div} U \tag{1}$$

und

$$\mathcal{E} \simeq \frac{1}{2\mu}\left(S - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu}(\operatorname{tr} S)I\right) \tag{2}$$

gilt.

Aufgabe 22: (4 Punkte)

Ein langer, dünner, zylinderförmiger Draht werde gestreckt. Hierbei werde die X_1–Achse längs des Drahts gewählt, so dass

$$S = S_{11} e_1 \otimes e_1$$

gilt, wobei die Vektoren e_1, e_2 und e_3 die Standardbasis des $\mathbb{R}^3$ sind: $e_j = (\delta_{ij})_{i=1,2,3}$.

a) Bestimmen Sie $\mathcal{E}$ für diesen Fall (verwenden Sie (2)) und interpretieren Sie das Resultat.

b) Das Verhältnis aus der Zugspannung und der Ausdehnung in Zugrichtung, d.h.

$$\frac{S_{11}}{\mathcal{E}_{11}}$$

nennt man das *Young'sche Modul*. Ferner wird das Verhältnis aus der Kontraktion in einer Richtung, die senkrecht zur Zugrichtung ist, und der Ausdehnung in Zugrichtung, d.h.

$$-\frac{\mathcal{E}_{22}}{\mathcal{E}_{11}}, \quad -\frac{\mathcal{E}_{33}}{\mathcal{E}_{11}}$$

als *Poisson–Koeffizient* bezeichnet.
Bestimmen Sie das Young'sche Modul und beide Poisson–Koeffizienten.

Aufgabe 23: (4 Punkte)

Die Parameter λ und μ seien von X abhängig. Beginnen Sie mit der folgenden Variante der Cauchy'schen Bewegungsgleichung

$$\rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \rho B + \mathrm{div}_X \; S,$$

um die Cauchy–Navier–Gleichung

$$\mu \Delta U + (\lambda + \mu)(\mathrm{grad\ div}\ U)^{\mathrm{T}} + (\mathrm{div}\ U)\nabla\lambda + (\nabla U + (\nabla U)^{\mathrm{T}})\nabla\mu + \rho B = \rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \qquad (3)$$

herzuleiten, wobei $\Delta = \Delta_X = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial X_i^2}$ der Laplace–Operator ist und jede Ableitung auf der linken Seite bezüglich X zu verstehen ist.

Aufgabe 24: (4 Punkte)

Das Medium sei nun homogen, d.h. λ, μ und ρ sind konstant. Zeigen Sie, dass in diesem Fall die Gleichung (3) reduziert wird auf:

$$\alpha^2 (\mathrm{grad\ div}\ U)^{\mathrm{T}} - \beta^2 \mathrm{rot\ rot}\ U + B = \frac{\partial^2 U}{\partial t^2},$$

wobei

$$\alpha := \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}\right)^{1/2}, \; \beta := \left(\frac{\mu}{\rho}\right)^{1/2}.$$