Universität Siegen
Department Mathematik
AG Geomathematik
Univ.-Prof. Dr. V. Michel

18. November 2014

Übungen zur Vorlesung

Mathematische Modelle der Erdbebenforschung

Wintersemester 2014/15
Blatt 7

Abgabe zu Beginn der Vorlesung am Donnerstag, den 27. November 2014

Aufgabe 25: (4 Punkte)

Seien $f, g \in \mathrm{C}^{(1)}(D, \mathbb{R}^3)$ und $U \in \mathrm{C}^{(1)}(D, \mathbb{R})$ gegebene Funktionen, wobei $D \subset \mathbb{R}^3$ offen ist. Beweisen Sie die folgenden Identitäten:

a) $\mathrm{div}(f \times g) = g \cdot (\mathrm{rot}\ f) - f \cdot (\mathrm{rot}\ g)$,

b) $\mathrm{rot}(Uf) = U\mathrm{rot}\ f + (\mathrm{grad}\ U)^{\mathrm{T}} \times f$,

c) $\mathrm{rot}(f(X) \times X) = (\nabla f(X)) \cdot X + 2f(X) - (\mathrm{div} f(X))X$.

Aufgabe 26: (4 Punkte)

Seien $f \in \mathrm{C}^{(2)}(D, \mathbb{R}^3)$ und $U \in \mathrm{C}^{(2)}(D, \mathbb{R})$ gegebene Funktionen, wobei $D \subset \mathbb{R}^3$ offen ist. Beweisen Sie die folgenden Identitäten:

a) $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\ U)^{\mathrm{T}} = 0$

b) $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\ f) = 0$.

Aufgabe 27: (4 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass der erste Piola–Kirchhoff'sche Spannungstensor $P = \Gamma : \nabla_X U$ mit isotropem Elastiziätstensor Γ im Fall einer P–Welle durch

$$P_{\mathrm{P}}(X,t) = \varphi'(X \cdot k - ct)(\lambda\ \alpha \cdot k\ I + 2\mu\ \alpha \otimes k)$$

bzw. im Fall einer S–Welle durch

$$P_{\mathrm{S}}(X,t) = \varphi'(X \cdot k - ct)\mu(\alpha \otimes k + k \otimes \alpha)$$

gegeben ist (Notationen siehe Vorlesung).

b) Beschränken Sie sich nun auf Ausbreitungsrichtungen k, die in der X_1–X_3–Ebene liegen. Ein Erdbeben verursache P-Wellen in Richtung k der folgenden Form

$$U_{\mathrm{P}}(X,t) = \vartheta_{\mathrm{P}} k \cos\left(\frac{\omega}{c_{\mathrm{P}}}(X \cdot k - c_{\mathrm{P}} t)\right).$$

Ferner erzeuge es S–Wellen in Richtung k, die in eine so genannte vertikale S–Welle

$$U_{\mathrm{SV}}(X,t) = \vartheta_{\mathrm{SV}}(e_2 \times k) \cos\left(\frac{\omega}{c_{\mathrm{S}}}(X \cdot k - c_{\mathrm{S}} t)\right)$$

und eine so genannte horizontale S–Welle

$$U_{\mathrm{SH}}(X,t) = \vartheta_{\mathrm{SH}} e_2 \cos\left(\frac{\omega}{c_{\mathrm{S}}}(X \cdot k - c_{\mathrm{S}} t)\right) \;,$$

zerlegt werden können, wobei $\vartheta_{\mathrm{P}}, \vartheta_{\mathrm{SV}}, \vartheta_{\mathrm{SH}}, \omega \in \mathbb{R}$ Konstanten sind und $e_2 = (0,1,0)^{\mathrm{T}}$. Bestimmen Sie den ersten Piola–Kirchhoff'schen Spannungstensor für diese drei Wellen.

Aufgabe 28: (4 Punkte)

Seien $a, b \in \mathbb{R}^3$ beliebige Vektoren. Lösen Sie die folgenden Probleme unter Verwendung des Levi-Cività–alternierenden Symbols:

a) Zeigen Sie, dass $a \times a = 0$ gilt.

b) Beweisen Sie, dass $a \perp (a \times b)$ und $b \perp (a \times b)$ gilt.