Universität Siegen
Department Mathematik
AG Geomathematik
Univ.-Prof. Dr. V. Michel

25. November 2014

Übungen zur Vorlesung

Mathematische Modelle der Erdbebenforschung

Wintersemester 2014/15
Blatt 8

Abgabe zu Beginn der Vorlesung am Donnerstag, den 04. Dezember 2014

Aufgabe 29: (4 Punkte)

Sei $F \in \mathrm{C}^{(2)}(\mathbb{R}^3\backslash\{0\}, \mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass die Hessematrix von F wie folgt dargestellt werden kann:

$$\begin{aligned}(\nabla_X \otimes \nabla_X)F(X) &= \xi \otimes \xi \frac{\partial^2}{\partial r^2} F(r\xi) + \xi \otimes \nabla_\xi^* \left(-\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} \right) F(r\xi) \\ &\quad + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} \left(I - \xi \otimes \xi \right) F(r\xi) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} \left(\nabla_\xi^* F(r\xi) \right) \otimes \xi \\ &\quad + \frac{1}{r^2} \nabla_\xi^* \otimes \nabla_\xi^* F(r\xi),\end{aligned}$$

wobei $X = r\xi \in \mathbb{R}^3\backslash\{0\}$, $r \in \mathbb{R}^+$ und $\xi \in \Omega$.

Aufgabe 30: (4 Punkte)

Sei nun $F \in \mathrm{C}^{(2)}(\mathbb{R}^3\backslash\{0\}, \mathbb{R})$ dargestellt als

$$F(r\xi) = G(r)Y(\xi); \quad r \in \mathbb{R}^+, \xi \in \Omega;$$

wobei $G \in \mathrm{C}^{(2)}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, $Y \in \mathrm{C}^{(2)}(\Omega, \mathbb{R})$. Schließen Sie nun, dass das Produkt aus der Hessematrix von F und $\xi \in \Omega$ folgendes ergibt:

$$\left(\left(\nabla_X \otimes \nabla_X \right) F(X) \right) \xi = \frac{d^2}{dr^2} G(r) o_\xi^{(1)} Y(\xi) + \frac{1}{r} \left(\frac{d}{dr} G(r) - \frac{1}{r} G(r) \right) o_\xi^{(2)} Y(\xi),$$

wobei $X = r\xi$, $r \in \mathbb{R}^+$ und $\xi \in \Omega$.

Aufgabe 31: (4 Punkte)

Sei $n \in \Omega$ und $U \in \mathrm{C}^{(1)}(\mathcal{E}, \mathbb{R}^3)$. Beweisen Sie, dass

$$\left(\nabla_X U + (\nabla_X U)^{\mathrm{T}} \right) n = 2 \frac{\partial U}{\partial n} + n \times \mathrm{rot}\, U$$

gilt.

Aufgabe 32: (4 Punkte)

Betrachten Sie ein (nur) radial heterogenes Medium, d.h. die Lamé–Parameter und die Massendichte sind Funktionen von r: "$\rho_0 = \rho_0(r)$, $\lambda = \lambda(r)$, $\mu = \mu(r)$". Zeigen Sie, dass die Cauchy–Navier–Gleichung in diesem Fall folgende Form annimmt:

$$\mu \Delta U + (\lambda + \mu)(\text{grad div } U)^{\mathrm{T}} + \frac{d\lambda}{dr}(\text{div} U)\varepsilon^r + \frac{d\mu}{dr}\left(2\frac{\partial U}{\partial r} + \varepsilon^r \times \text{rot } U\right) + \rho_0 B = \rho_0 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}.$$