Universität Siegen
Department Mathematik
Arbeitsgruppe Geomathematik
Prof. Dr. V. Michel
S. Orzlowski, M. Sc.

13. Oktober 2014

Funktionalanalysis

Übungen Wintersemester 2014/2015
1. Blatt

Abgabe bis Montag, 20. Oktober 2014, vor Beginn der Vorlesung.

Aufgabe 1: (4 Punkte)

Prüfen Sie, welche der folgenden Räume (E, d) metrische Räume sind.

a) $E \neq \emptyset$ beliebig, d diskrete Metrik

b) $E = C^{(\infty)}[a, b]$ mit $(a < b)$,

$$d(f, g) := \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \frac{\max\limits_{x\in[a,b]} |f^{(n)}(x) - g^{(n)}(x)|}{1 + \max\limits_{x\in[a,b]} |f^{(n)}(x) - g^{(n)}(x)|}$$

c) $E = C(\mathbb{R})$

$$d(f, g) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2} \frac{\max\limits_{x\in[-n,n]} |f(x) - g(x)|}{1 + \max\limits_{x\in[-n,n]} |f(x) - g(x)|}$$

d) $E = \mathbb{R}$, $d(x, y) = |x^3 - y^3|$

(Prüfen Sie bei b) und c) auch, ob die Ausdrücke existieren und stets endlich sind.)

Anmerkung: $C^{(k)}(D)$ bezeichnet die Menge aller k-fach stetig differenzierbaren Funktionen $F\colon D \to \mathbb{R}$, wobei $C^{(0)}(D) =: C(D)$ für die stetigen Funktionen auf D steht.

Aufgabe 2: (4 Punkte)

Sei $M \neq \emptyset$ eine beliebige Menge versehen mit der diskreten Metrik. Bestimmen Sie ihre Topologie, d. h. beschreiben Sie alle offenen und abgeschlossenen Mengen.

Aufgabe 3: (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass folgende Aussagen für Teilmengen eines beliebigen metrischen Raumes gelten.

a) Schnitte beliebig vieler kompakter Mengen sind kompakt.

b) Vereinigungen endlich vieler kompakter Mengen sind kompakt.

Aufgabe 4: (4 Punkte)

Sei (E, d) ein metrischer Raum, $K \subset E$ kompakt und $\mathbb{R}$ mit der euklidischen Metrik versehen. Sei $f\colon K \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen oder widerlegen Sie:

a) $f(K)$ ist kompakt in $\mathbb{R}$.

b) f nimmt auf K Maximum und Minimum an.

c) f ist gleichmäßig stetig, d. h.

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : (\forall x, y \in K : d(x, y) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon)$$