Universität Siegen
Department Mathematik
Arbeitsgruppe Geomathematik
Prof. Dr. V. Michel
S. Orzlowski, M. Sc.

15. Dezember 2014

# Funktionalanalysis

**Übungen Wintersemester 2014/2015**
**10. Blatt**

Abgabe bis Montag, 5. Januar 2015, vor Beginn der Vorlesung.

**Aufgabe 38:** (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass die folgenden Abbildungen Kontraktionen sind und bestimmen Sie ihren Fixpunkt analytisch oder numerisch auf vier Nachkommastellen genau.

a) $f\colon [0, \frac{3}{4}] \to [0, \frac{3}{4}]$, $x \mapsto \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}$

b) $f\colon [\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}] \to [\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$, $x \mapsto \frac{6}{5}\sin\ x$

**Aufgabe 39:** (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass jede Kontraktion gleichmäßig stetig ist.

**Aufgabe 40:** (4 Punkte)

Sei $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ eine konvergente Reihe mit nichtnegativen Summanden. Zusätzlich sei $(M, d)$ ein vollständiger metrischer Raum und $A \subset M$ abgeschlossen und nichtleer. Zeigen Sie: Wenn $f\colon A \to A$ die Ungleichung

$$d(f^n(x), f^n(y)) \leq a_n d(x, y)$$

für alle $x$, $y \in A$, $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ erfüllt, wobei $f^n$ die $n$-fach iterierte Anwendung von $f$ bezeichnet, d. h.

$$\begin{aligned} f^n(z) &:= f(f^{n-1}(z)), \\ f^1(z) &:= f(z), \end{aligned}$$

dann besitzt $f$ genau einen Fixpunkt $\hat{x}$ in $A$, welcher der Grenzwert $(f^n(x_0))_n$ ist mit $x_0 \in A$ beliebig. Außerdem gilt die Fehlerabschätzung

$$d(\hat{x}, f^n(x_0)) \leq \left( \sum_{k=n}^{\infty} a_k \right) d(f(x_0), x_0).$$

**Aufgabe 41:** (4 Punkte)

Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Zeigen Sie, dass

$$\overline{B}(x,\varepsilon) = \overline{B(x,\varepsilon)}$$

für alle $x \in X$ und alle $\varepsilon > 0$. Hierbei ist

$$\overline{B}(x,\varepsilon) \coloneqq \{y \in X : \|x-y\| \leq \varepsilon\}\,.$$