Universität Siegen
Department Mathematik
Arbeitsgruppe Geomathematik
Prof. Dr. V. Michel
S. Orzlowski, M. Sc.

15. Dezember 2014

Funktionalanalysis

Übungen Wintersemester 2014/2015
11. Blatt

Abgabe bis Montag, 19. Januar 2015, vor Beginn der Vorlesung.

Aufgabe 42: (4 Punkte)

Seien $a < b$, y_0 und $\alpha < \beta$ gegebene reelle Zahlen. Außerdem sei $f\colon [a,b] \times [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Definiert sei die Menge

$$K \coloneqq \{g \in \mathrm{C}[a,b] \mid g(x) \in [\alpha,\beta] \quad \text{für alle} \quad x \in [a,b]\}$$

und der Operator

$$A\colon K \to \mathrm{C}[a,b]$$

durch

$$(Ag)(x) \coloneqq y_0 + \int_a^x f(t, g(t))\,\mathrm{d}t, \qquad x \in [a,b].$$

Zeigen Sie, dass das Bild $A(K)$ relativ kompakt in $\mathrm{C}[a,b]$ ist.

Aufgabe 43: (4 Punkte)

a) Zeigen Sie mit Hilfe eines Gegenbeispiels, dass die „Abzählbarkeitsbedingung" in der Definition der ersten Kategorie nicht weggelassen werden kann.

b) Benennen Sie einen unvollständigen metrischen Raum, der von erster Kategorie ist.

Aufgabe 44: (4 Punkte)

Konstruieren Sie eine Teilmenge des l^p für $1 \leq p < +\infty$, welche beschränkt und abgeschlossen aber nicht kompakt ist.

Aufgabe 45: (4 Punkte)

Beweisen Sie: Jeder (folgen-) kompakte metrische Raum ist vollständig.
(Benutzen Sie nicht Satz 3.6.1.)