Universität Siegen
Department Mathematik
Arbeitsgruppe Geomathematik
Prof. Dr. V. Michel
S. Orzlowski, M. Sc.

19. Januar 2015

Funktionalanalysis

Übungen Wintersemester 2014/2015
12. Blatt

Abgabe bis Montag, 26. Januar 2015, vor Beginn der Vorlesung.

Aufgabe 46: (4 Punkte)

Sei c_0 die Menge aller Nullfolgen. Zeigen Sie: c_0 versehen mit der Maximumsnorm ist ein Banachraum.

Aufgabe 47: (4 Punkte)

Da $\ell^p \subset \ell^q$ für $1 \leq p < q \leq +\infty$, kann der Raum ℓ^p mit der $\|\cdot\|_q$-Norm anstelle der $\|\cdot\|_p$-Norm versehen werden. Untersuchen Sie, ob $\|\cdot\|_q$ und $\|\cdot\|_p$ äquivalente Normen im ℓ^p sind, d. h. ob es positive Konstanten γ_1, γ_2 gibt, so dass

$$0 < \gamma_1 \leq \frac{\|(a_n)\|_p}{\|(a_n)\|_q} \leq \gamma_2$$

für alle $(a_n) \in \ell^p \backslash \{(0)\}$.

Aufgabe 48: (4 Punkte)

Sei X ein Banachraum und $Y \subset X$ ein abgeschlossener, linearer Teilraum. Zeigen Sie, dass der kanonische Homomorphismus

$$\begin{aligned} h\colon X &\to X/Y \\ x &\mapsto \hat{x} \end{aligned}$$

die folgenden Eigenschaften besitzt:

a) Er ist stetig.

b) Das Bild offener Mengen ist offen in X/Y.

Aufgabe 49: (4 Punkte)

Die lineare Abbildung $A\colon \ell^2 \to \ell^2$ sei definiert durch

$$Ax := \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\xi_j}{j} e^1 \ ; \ x = (\xi_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \ell^2,$$

wobei $e^k = (\delta_{jk})_{j\in\mathbb{N}}$, d. h.

$$Ax = \left(0, \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\xi_j}{j}, 0, 0, \dots\right).$$

Zeigen Sie:

a) Die Abbildung ist wohldefiniert, d. h. $Ax \in \ell^2$ und $\left|\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\xi_j}{j}\right| < +\infty$ für alle $x \in \ell^2$.

b) A ist stetig.

c) Wenn ℓ^2 mit der $\|\cdot\|_\infty$-Norm versehen wird, dann ist A unstetig.

   Hinweis: Betrachten Sie $x^{(n)} := \sum_{j=1}^{n} e^j$.