Universität Siegen
Department Mathematik
Arbeitsgruppe Geomathematik
Prof. Dr. V. Michel
S. Orzlowski, M. Sc.

4. November 2014

Funktionalanalysis

Übungen Wintersemester 2014/2015
3. Blatt

Abgabe bis Montag, 3. November 2014, vor Beginn der Vorlesung.

Aufgabe 10: (4 Punkte)

Sei $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ Prä-Hilbertraum, $Y \subset E$ vollständiger linearer Teilraum. Zeigen Sie, dass dann die Abbildung

$$\begin{aligned} P\colon E &\to Y \\ x &\mapsto Px, \end{aligned}$$

definiert durch $(x - Px) \in Y^\perp$ (d. h. $x = Px + z$, $z \in Y^\perp$), die folgenden Eigenschaften hat:

a) P ist eine Projektion, d. h. $P^2 = P$,

b) $\sup\limits_{\substack{x \in E \\ x \neq 0}} \frac{\|Px\|}{\|x\|} = 1$, falls $Y \neq \{0\}$,

c) $\forall x_1, x_2 \in E: \ \langle Px_1, x_2\rangle = \langle x_1, Px_2\rangle$.

Aufgabe 11: (4 Punkte)

Sei $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ Prä-Hilbertraum und $Y \subset E$ vollständiger linearer Teilraum. Zeigen Sie, dass $Y^\perp$ ein abgeschlossener linearer Teilraum von E ist und $(Y^\perp)^\perp = Y$ gilt.

Aufgabe 12: (4 Punkte)

Sei $\mathrm{Pol}_{0,\dots,n}$ die Menge aller Polynome auf $\mathbb{R}$ mit Grad $\leq n$. Beweisen Sie: Für jedes $f \in \mathrm{C}[a,b]$ existiert genau ein $p \in \mathrm{Pol}_{0,\dots,n}$, so dass

$$\int_a^b |f(x) - p(x)|^2 \,\mathrm{d}x = \min \left\{ \int_a^b |f(x) - q(x)|^2 \,\mathrm{d}x \,\middle|\, q \in \mathrm{Pol}_{0,\dots,n} \right\}$$

gilt.
Hinweis: Benutzen Sie die Existenz einer Orthonormalbasis in $(\mathrm{Pol}_{0,\dots,n}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathrm{L}^2[a,b]})$.

Aufgabe 13: (4 Punkte)

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit stückweise stetig differenzierbarem Rand $\partial D = \bar{D} \setminus \mathring{D}$), $F \in \mathrm{L}^2(\bar{D})$ heißt distributionell harmonisch (Bezeichnung: $F \in \mathrm{Distharm}(\bar{D})$), wenn

$$\int_{\bar{D}} F(x) \Delta\varphi(x) \,\mathrm{d}x = 0$$

für alle $\varphi \in \mathrm{C}_0^{(\infty)}(\bar{D})$, d. h. alle $\varphi \in \mathrm{C}^{(\infty)}(\bar{D})$ mit $\varphi|_{\partial D} = 0$ und $(\nabla\varphi)|_{\partial D} = 0$ gilt. Hierbei ist $\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ der Laplaceoperator im $\mathbb{R}^n$.

a) Zeigen Sie: Ist $F \in \mathrm{C}^{(2)}(\bar{D})$ harmonisch im klassischen Sinne, d. h. $\Delta F = 0$, so ist F auch distributionell harmonisch.

b) Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{L}^2(\bar{D}) = \mathrm{Distharm}(\bar{D}) \oplus \mathrm{Distharm}(\bar{D})^{\perp_{\mathrm{L}^2(\bar{D})}}$$

gilt.