Universität Siegen
Department Mathematik
Arbeitsgruppe Geomathematik
Prof. Dr. V. Michel
S. Orzlowski, M. Sc.

3. November 2014

Funktionalanalysis

Übungen Wintersemester 2014/2015
4. Blatt

Abgabe bis Montag, 10. November 2014, vor Beginn der Vorlesung.

Aufgabe 14: (2 Punkte)

Sei $(a_n)_n \in \ell^p \cap \ell^\infty$ für alle $p \geq 1$. Zeigen Sie

$$\lim_{p \to \infty} \|(a_n)\|_p = \|(a_n)\|_\infty.$$

Aufgabe 15: (2 Punkte)

Seien $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ und $(Z, \|\cdot\|_Z)$ normierte Räume. Zeigen Sie:
Ist $S \in \mathcal{L}(Y, Z)$ und $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, so ist $ST \in \mathcal{L}(X, Z)$ und es gilt $\|ST\| \leq \|S\|\|T\|$.

Aufgabe 16: (4 Punkte)

Sei $a \coloneqq (a_n)_n$ eine positive Nullfolge. Der lineare Operator

$$T \colon \ell^\infty \to \ell^\infty$$

sei definiert durch $T((b_n)_n) = (a_n b_n)_n$. Zeigen Sie:

a) $\|T\| = \|a\|_{\ell^\infty}$.

b) T ist injektiv, aber <u>nicht</u> surjektiv.

c) $T^{-1} : T(\ell^\infty) \to \ell^\infty$ ist nicht stetig.

Aufgabe 17: (4 Punkte)

Untersuchen Sie, welche der folgenden linearen Operatoren stetig sind und bestimmen Sie die Operatornorm.

a) Sei c der Raum der konvergenten reellen Folgen:

$$\begin{aligned} T\colon (c, \|\cdot\|_{\ell^\infty}) &\to (\mathbb{R}, |\cdot|) \\ (a_n)_n &\mapsto \lim_{n\to\infty} a_n. \end{aligned}$$

b) $B_n\colon (\mathrm{C}[0,1], \|\cdot\|_{\mathrm{C}[0,1]}) \to (\mathrm{C}[0,1], \|\cdot\|_{\mathrm{C}[0,1]})$,

$$(B_n f)(t) := \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}, \quad f \in \mathrm{C}[0,1],$$

wobei $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ fest ist. (B_n heißt Bernstein'scher Approximationsoperator.)

c) $$\begin{aligned} T\colon (\mathrm{C}[a,b], \|\cdot\|_{\mathrm{C}[a,b]}) &\to (\mathrm{C}[a,b], \|\cdot\|_{\mathrm{C}[a,b]}) \\ f &\mapsto \left(x \mapsto \int_a^x f(t)\, dt\right) \end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned} T\colon (\mathrm{C}^{(1)}[a,b], \|\cdot\|_{\mathrm{C}[a,b]}) &\to (\mathrm{C}[a,b], \|\cdot\|_{\mathrm{C}[a,b]}) \\ f &\mapsto f' \end{aligned}$$

Aufgabe 18: (4 Punkte)

Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. In der Quantenmechanik treten lineare Operatoren $A\colon X \to X$, $B\colon X \to X$ mit

$$AB - BA = I \tag{1}$$

auf ($I :=$ Id (Identität)).

a) Zeigen Sie, dass dann

$$\begin{aligned} AB^{n+1} - B^{n+1}A &= (AB^n - B^nA)B + B^n(AB - BA), \\ AB^{n+1} - B^{n+1}A &= (n+1)B^n \end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt ($B^0 := I$).

b) Beweisen Sie, dass daraus folgt, dass A und B nicht beide stetig sein können.

c) Seien $A\colon X \to X$ (Impulsoperator) und $B : X \to X$ (Ortsoperator), wobei $X = \mathrm{C}^{(\infty)}[a,b]$, $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{\mathrm{C}[a,b]}$, gegeben durch

$$\begin{aligned} (Af)(t) &:= f'(t), \\ (Bf)(t) &:= t \cdot f(t). \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass (1) gilt. (Bemerkung: Die tatsächlichen Orts- und Impulsoperatoren der Quantenmechanik sind leicht verändert gegenüber diesen Abbildungen.)