Universität Siegen
Department Mathematik
Arbeitsgruppe Geomathematik
Prof. Dr. V. Michel
S. Orzlowski, M. Sc.

7. November 2014

# Funktionalanalysis

**Übungen Wintersemester 2014/2015**
**5. Blatt**

Abgabe bis Montag, 17. November 2014, vor Beginn der Vorlesung.

**Aufgabe 19:** (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass der Operator

$$\begin{aligned} {}^*\colon \mathcal{L}(X,Y) &\to \mathcal{L}(Y,X) \\ A &\mapsto A^* \end{aligned}$$

($X$, $Y$ Hilberträume), der einem Operator die zugehörige Adjungierte zuordnet, folgende Eigenschaften hat ($A$, $B \in \mathcal{L}(X,Y)$):

a) $(A+B)^* = A^* + B^*$.

b) $(\lambda A)^* = \overline{\lambda} A^* \quad \forall\ \lambda \in \mathbb{K}$.

c) $(A^{**} :=)(A^*)^* = A$.

d) Wenn $A$ bijektiv ist, so ist $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$.

Bemerkung: Nehmen Sie bei Aufgabenteil d) an, dass $A^{-1}$ linear und stetig ist.

**Aufgabe 20:** (4 Punkte)

Überprüfen Sie, welche der folgenden Operatoren selbstadjungiert sind.

a) $T\colon \ell^2 \to \ell^2$, $(b_n)_n \mapsto (a_n b_n)_n$, wobei $(a_n)_n$ eine vorgegebene reelle, beschränkte Folge ist und

$$\ell^2 := \left\{ (b_n)_n \subset \mathbb{C} \,\middle|\, \sum_{n=0}^{\infty} |b_n|^2 < +\infty \right\}$$

mit $\langle (b_n)_n, (c_n)_n \rangle_{\ell^2} := \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n \overline{c_n}$.

b) $T\colon \mathrm{L}^2(\mathbb{R}) \to \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, wobei

$$(Tf)(x) := e^{-x^2} f(x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

c) $T\colon \mathrm{L}^2(K_R(0)) \to \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^3 \backslash \overline{K_R(0)})$ mit $K_R(0) := \{x \in \mathbb{R}^3 |\ |x| < R\}, R > 0$ und

$$(Tf) = \int\limits_{K_R(0)} \frac{f(x)}{|x - \cdot|}\, \mathrm{d}x.$$

d) $T\colon \ell^2 \to \ell^2$ mit $(b_n)_n \mapsto T((b_n)_n)$, wobei $T$ der Shift-Operator ist, definiert durch $T((b_n)_n) = (c_n)_n$ mit

$$c_n = \begin{cases} 0 & , \quad n = 0 \\ b_{n-1} & , \quad n \geq 1, \end{cases}$$

d. h. $(b_0, b_1, b_2, \ldots) \mapsto (0, b_0, b_1, \ldots)$

**Aufgabe 21:** (4 Punkte)

Sei $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle_X)$ ein Hilbertraum. Zu $f \in X^*$ existiert nach dem Riesz'schen Darstellungssatz eindeutig ein $y_f \in X$, so dass $f(x) = \langle x, y_f \rangle_X$ für alle $x \in X$ gilt. Zeigen Sie, dass durch

$$\langle f, g \rangle_{X^*} := \overline{\langle y_f, y_g \rangle_X} \qquad f, g \in X^*;$$

ein Skalarprodukt auf $X^*$ definiert ist und $X^*$ bezüglich diesem vollständig, also ein Hilbertraum, ist.

**Aufgabe 22:** (4 Punkte)

Zu dem so genannten Bidual $X^{**} := (X^*)^*$ des Hilbertraums $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle_X)$ sei die Abbildung

$$j\colon X \to X^{**}$$

derart definiert, dass $x \in X$ das Funktional $j(x) := T_x \in X^{**} = \mathcal{L}(X^*, \mathbb{K})$ mit

$$T_x(f) = f(x) \in \mathbb{K} \qquad \forall\, f \in X^*$$

zugeordnet wird. Zeigen Sie, dass $j$ ein isometrischer Isomorphismus ist, d. h. $j$ ist linear und bijektiv und erfüllt die Isometriebedingung

$$\|j(x)\|_{X^{**}} = \|x\|_X$$

für alle $x \in X$.

Bemerkung: Damit kann $X$ mit $X^{**}$ identifiziert werden. Räume mit dieser Eigenschaft heißen *reflexiv*.