Universität Siegen
Department Mathematik
Arbeitsgruppe Geomathematik
Prof. Dr. V. Michel
S. Orzlowski, M.Sc.

24. November 2014

Funktionalanalysis

Übungen Wintersemester 2014/15
7. Blatt

Abgabe bis Montag, 01. Dezember 2014, vor Beginn der Vorlesung.

Aufgabe 27: (1+5=6 Punkte)

Bestimmen Sie für jeden der folgenden Operatoren die Resolventenmenge und alle drei Spektren:

a) $A : (C^{(\infty)}[a,b], \|\cdot\|) \longrightarrow (C^{(\infty)}[a,b], \|\cdot\|)$, wobei $\|\cdot\|$ eine beliebige Norm ist, mit $Af := f'$.

b) $A : (\ell^2, \|\cdot\|_2) \longrightarrow (\ell^2, \|\cdot\|_2)$ mit $(A(a_n))_k := a_{k+1}$, $k \in \mathbb{N}_0$, d.h.

$$A : (a_0, a_1, \cdots) \mapsto (a_1, a_2, \cdots).$$

Bestimmen Sie bei Teil b) auch den Spektralradius und die Adjungierte. Das Punktspektrum von A^* hilft beim Spektrum von A.

Aufgabe 28: (4 Punkte)

Bestimmen Sie alle Eigenwerte des Operators $L : C^{(\infty)}(\mathbb{R}) \longrightarrow C^{(\infty)}(\mathbb{R})$, deren zugehörige Eigenfunktionen polynomiale Form haben, wobei

$$L := -2t\frac{\partial}{\partial t} + (1-t^2)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\,.$$

Hinweis: Setzen Sie die Eigenfunktionen zunächst als Potenzreihen an.

Aufgabe 29: (6 Punkte)

Seien $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle_X)$ und $(Y, \langle\cdot,\cdot\rangle_Y)$ Hilberträume über $\mathbb{C}$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Orthonormalbasis von X, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Orthonormalbasis von Y und $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Nullfolge in $\mathbb{C}$. Dann sei der Operator $A : X \longrightarrow Y$ definiert durch

$$Ax := \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n \langle x, u_n\rangle_X\, v_n, \quad x \in X\,.$$

Bestimmen Sie $\|A\|_{\mathcal{L}}$ und A^* sowie für den Fall $X = Y, (u_n) = (v_n), \langle\cdot,\cdot\rangle_X = \langle\cdot,\cdot\rangle_Y$ den Spektralradius, die Resolventenmenge und die drei Spektren. Zeigen Sie außerdem, dass $A : X \to Y$ kompakt ist.