Universität Siegen
Department Mathematik
Arbeitsgruppe Geomathematik
Prof. Dr. V. Michel
S. Orzlowski, M.Sc.

01. Dezember 2014

Funktionalanalysis

Übungen Wintersemester 2014/15
8. Blatt

Abgabe bis Montag, 08. Dezember 2014, vor Beginn der Vorlesung.

Aufgabe 30: (2+4=6 Punkte)

Betrachten Sie den Raum BV$[a,b]$ aller Funktionen von beschränkter Variation auf $[a,b]$.

a) Untersuchen Sie, ob es eine Teilmengenbeziehung ($\subset, \subsetneqq, \supset, \supsetneqq$) zu B$[a,b]$ gibt.

b) Zeigen Sie, dass $(\mathrm{B}V[a,b], \|\cdot\|_{\mathrm{BV}})$ ein Banachraum ist, d.h. weisen Sie nach, dass ein Vektorraum vorliegt, dass $\|\cdot\|_{\mathrm{BV}}$ eine Norm ist und dass der Raum vollständig ist.

Aufgabe 31: (2 Punkte)

Warum sind $(\mathrm{L}^\infty[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ und $(\mathrm{B}[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ keine Hilberträume?

Aufgabe 32: (4 Punkte)

Welche der folgenden Paare $(T,\mathcal{U})$ sind topologische Räume? Welche davon sind Hausdorff-Räume?

a) $T \neq \emptyset$ beliebig, $\mathcal{U} := \{T, \emptyset\}$

b) $T \neq \emptyset$ beliebig, $\mathcal{U} := \mathcal{P}(T)$ (Potenzmenge von T)

c) $T = [a,b]$ (reelles Intervall), $\mathcal{U} := \{U \subset \mathbb{R} : \forall x \in U \exists \varepsilon > 0 \{y \in \mathbb{R} : |y - x| < \varepsilon\} \subset U\}, a < b$

d) $T = \mathbb{Z}, \mathcal{U} := \{U \subset \mathbb{Z} | \exists k \in \mathbb{Z} \forall n \in \mathbb{Z}, n \geq k : n \in U\} \cup \{\emptyset\}$
d.h. $\mathcal{U} := \{U \subset \mathbb{Z} | \exists k \in \mathbb{Z} : \{k, k+1, \ldots\} \subset U\} \cup \{\emptyset\}$

Aufgabe 33: (2+2=4 Punkte)

Welche der folgenden Räume sind vollständig? (jeweils $a < b$)

a) $\mathrm{C}^{(1)}[a,b]$ mit $\|f\| := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$.

b) $\mathrm{C}^{(\infty)}[a,b]$ mit $d(f,g) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\|f^{(n)} - g^{(n)}\|_\infty}{1 + \|f^{(n)} - g^{(n)}\|_\infty}$.