Universität Siegen
Department Mathematik
Arbeitsgruppe Geomathematik

Prof. Dr. V. Michel
S. Orzlowski, M. Sc.
9. April 2015

Funktionalanalysis II: Inverse Probleme
Übungen Sommersemester 2015
1. Blatt

Abgabe bis Donnerstag, 16. April 2015, vor Beginn der Vorlesung.

Aufgabe 1: (4 Punkte)

Sei X ein linearer Raum und seien $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ Normen auf X, so dass X vollständig bezüglich beider Normen ist. Beweisen Sie: Wenn es eine Konstante $c_1 > 0$ gibt, die

$$\|x\|_1 \leq c_1 \|x\|_2 \qquad \forall\, x \in X$$

erfüllt, dann sind $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ äquivalent.

Aufgabe 2: (4 Punkte)

Betrachten Sie das inverse Problem

$$\int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t = g(x) - g(a) \qquad \forall\, x \in [a,b],$$

wobei $g \in \mathrm{C}^{(1)}[a,b]$ gegeben und $f \in \mathrm{C}^{(0)}[a,b]$ gesucht ist. Sei $\mathrm{C}^{(0)}[a,b]$ wie üblich versehen mit der Maximumsnorm und sei $\mathrm{C}^{(1)}[a,b]$

a) versehen mit der Maximumsnorm (als Unterraum von $\mathrm{C}^{(0)}[a,b]$)

b) versehen mit der Norm $\|f\|_{\mathrm{C}^{(1)}} := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$.

Untersuchen Sie in beiden Fällen die Wohlgestelltheit im Sinne von Hadarmard, d. h. gibt es immer eine eindeutige Lösung, die stetig von der gegebenen rechten Seite abhängt?

Aufgabe 3: (4 Punkte)

Beweisen Sie: Wenn $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ endlich-dimensionale normierte Räume sind, dann ist jede lineare Abbildung $T\colon X \to Y$ offen.

Aufgabe 4: (4 Punkte)

Seien $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle_X)$ und $(Y, \langle\cdot,\cdot\rangle_Y)$ Hilberträume über $\mathbb{C}$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Orthonormalbasis von X, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Orthonormalbasis von Y und $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge in $\mathbb{C}$. Sei der lineare Operator $A\colon X \to Y$ definiert durch

$$Ax := \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n \langle x, u_n\rangle_X \, v_n, \quad x \in X. \tag{1}$$

a) Beweisen Sie: A ist genau dann stetig, wenn $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ beschränkt ist.

b) Sei $X = Y = \ell^2$ und sei $A\colon \ell^2 \to \ell^2$ gegeben durch $A = TS$ mit

$$\begin{aligned} T\colon \ell^2 \to \ell^2 : &\quad (x_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \mapsto (x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}_0}\,, \\ S\colon \ell^2 \to \ell^2 : &\quad (x_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \mapsto \left(\frac{x_n}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}_0}. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie für A die Darstellung (1).
Bemerkung: Hierbei müssen $(u_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(v_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ nur Orthonormalsysteme sein.