Universität Siegen
Department Mathematik
Arbeitsgruppe Geomathematik

Prof. Dr. V. Michel
S. Orzlowski, M. Sc.
18. Juni 2015

Funktionalanalysis II: Inverse Probleme
Übungen Sommersemester 2015
10. Blatt

Abgabe bis Donnerstag, 25. Juni 2015 vor dem Beginn der Vorlesung.

Aufgabe 37: (2 Punkte)

Bestimmen Sie für den folgenden Operator T ein singuläres System und geben Sie $\mathcal{N}(T)$, $\overline{\mathcal{R}(T)}$ sowie T^+ an.

$$T\colon \mathrm{L}^2([0,2\pi],\mathbb{C}) \to \mathrm{L}^2([0,2\pi],\mathbb{C})$$
$$(TF)(s) := \int_0^{2\pi} e^{i(t-s)} F(t)\,\mathrm{d}t, \qquad s \in [0,2\pi].$$

Aufgabe 38: (2+2+1+1 = 6 Punkte)

Sei $T\colon \mathrm{L}^2(D) \to \mathrm{L}^2(D)$ ein Fredholm'scher Integraloperator erster Art der Form

$$(TF)(y) = \int_D k(x,y)F(x)\,\mathrm{d}x$$

und $\lambda \neq 0$. Beweisen Sie die Fredholm'sche Alternative:

a) T besitzt höchstens abzählbar viele Eigenwerte $\{\lambda_n\}_n$. Die Eigenwerte von T^* sind $\{\overline{\lambda_n}\}_n$.

b) Die Lösungsräume von

$$\int_D k(x,y)F(x)\,\mathrm{d}x - \lambda F(y) = 0, \qquad y \in D, \tag{1}$$
$$\int_D \overline{k(x,y)}H(y)\,\mathrm{d}y - \overline{\lambda}H(x) = 0, \qquad x \in D, \tag{2}$$

sind beide endlich-dimensional und haben die gleiche Dimension.

c) Die Gleichung

$$\int_D k(x,y)F(x)\,\mathrm{d}x - \lambda F(y) = G(y), \qquad y \in D, \tag{3}$$

hat genau dann eine Lösung F, wenn G zu allen Lösungen H von (2) orthogonal im $\mathrm{L}^2(D)$-Sinne ist.

d) Die Gleichung

$$\int_D \overline{k(x,y)}H(y)\,\mathrm{d}y - \overline{\lambda}H(x) = G(x), \qquad x \in D, \tag{4}$$

hat genau dann eine Lösung H, wenn G zu allen Lösungen F von (1) orthogonal im $\mathrm{L}^2(D)$-Sinne ist.

Aufgabe 39: (4 Punkte)

Sei $A \in \mathcal{K}(X,Y)$ und α, $\beta \in \mathbb{R}^+$. Zeigen Sie, dass dann

$$\left\| |A|^\beta x \right\|_X \leq \left\| |A|^{\beta+\alpha} x \right\|_X^{\frac{\beta}{\beta+\alpha}} \|x\|_X^{\frac{\alpha}{\beta+\alpha}}$$

für alle $x \in X$ gilt.

Aufgabe 40: (4 Punkte)

Sei $A \in \mathcal{K}(X,Y)$ und $(\lambda_j, u_j, v_j)_{j\in\mathbb{N}}$ ein zugehöriges singuläres System. Ferner erfüllen $\varphi\colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ und $\psi\colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ die Voraussetzungen aus Definition 8.3.1. Zeigen Sie, dass dann folgendes gilt:

a) $\|A\| = \lambda_1$,

b) $\varphi(A^*A)A^* = A^*\varphi(AA^*)$,

c) $$\begin{aligned}\|\varphi(A^*A)\psi(A^*A)\| &= \sup\left\{\left|\varphi(\lambda_j^2)\psi(\lambda_j^2)\right| : j \in \mathbb{N}\right\} \\ &\leq \sup\left\{|\varphi(\sigma)\psi(\sigma)| : 0 \leq \sigma \leq \|A\|^2\right\},\end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned}\|\varphi(A^*A)A^*\| &= \sup\left\{\lambda_j \left|\varphi(\lambda_j^2)\right| : j \in \mathbb{N}\right\} \\ &\leq \sup\left\{\sqrt{\sigma}\,|\varphi(\sigma)| : 0 \leq \sigma \leq \|A\|^2\right\}.\end{aligned}$$