Universität Siegen
Department Mathematik
Arbeitsgruppe Geomathematik

Prof. Dr. V. Michel
S. Orzlowski, M. Sc.
25. Juni 2015

# Funktionalanalysis II: Inverse Probleme
# Übungen Sommersemester 2015
# 11. Blatt

Abgabe bis Donnerstag, 02. Juli 2015 vor dem Beginn der Vorlesung.

**Aufgabe 41:** (4 Punkte)

Gegeben sei der Fredholm'sche Integraloperator $A : L^2[0,\pi] \longrightarrow L^2[0,\pi]$ durch

$$(Af)(y) := \int_0^\pi k(x,y) f(x)\, dx,$$

wobei

$$k(x,y) = \begin{cases} \cos y \, \sin x, & 0 \le x \le y \le \pi \\ \cos x \, \sin y, & 0 \le y \le x \le \pi\,. \end{cases}$$

Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenfunktionen von $A$. Was wäre dann zum Beispiel ein singuläres System von $A$?

**Aufgabe 42:** (4 Punkte)

Betrachten Sie die 1D-Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

mit den Randbedingungen

$$u(0,t) = u(\pi,t) \quad \forall t\,.$$

Der Operator $A : L^2[0,\pi] \longrightarrow L^2[0,\pi]$ bildet eine Lösung zur Zeit $t=0$ auf ihre Werte zur Zeit $t=1$ ab. Sie dürfen hierbei annehmen, dass $A$ geeignet auf $L^2[0,\pi]$ fortgesetzt ist, und dass bekannt ist, dass

$$u_n(x) := \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(nx), \quad x \in [0,\pi], \quad n \in \mathbb{N}\,,$$

eine ONB von $L^2[0,\pi]$ bildet. Stellen Sie $A$ als Fredholm'schen Integraloperator 1. Art dar und geben Sie ein singuläres System an.

**Aufgabe 43:** (2 Punkte)

Sei $A : L^2[0,1] \longrightarrow L^2[0,1]$ der Operator, der eine Funktion $f$ auf die Funktion $g = Af$ abbildet, welche durch

$$g'' = -f, \quad g(0) = g(1) = 0\,,$$

gegeben ist. Hierbei gelten analoge Annahmen zu denen in Aufgabe 42.
Zeigen Sie, dass $A$ injektiv und selbstadjungiert ist und bestimmen Sie ein singuläres System von $A$ (ohne Aufgabe 44 zu benutzen).

**Aufgabe 44:** (6 Punkte)

Sei $(\frac{1}{(\pi n)^2}, u_n, u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $u_n(t) := \sqrt{2}\sin(n\pi t)$ ein singuläres System des Operators $A$ aus Aufgabe 43. Zu $\nu \in \mathbb{N}_0$ sei ferner

$$M_\nu := \{f \in C^{(2\nu)}[0,1] \,|\, f^{(2i)}(0) = f^{(2i)}(1) = 0 \;\; \forall i = 0, \dots, \nu - 1\}\,.$$

Zeigen Sie, dass $\|f\|_\nu = \|f^{(2\nu)}\|_{L^2[0,1]}$ für alle $f \in M_\nu$, und

$$\overline{M_\nu}^{\|\cdot\|_\nu} = X_\nu\,,$$

wobei $X_\nu := \mathcal{R}\left(|A|^\nu\right)$, siehe Vorlesung (Hinweis: Benutzen Sie die Parseval-Identität und partielle Integration).