Universität Siegen
Department Mathematik
Arbeitsgruppe Geomathematik

Prof. Dr. V. Michel
S. Orzlowski, M. Sc.
02. Juli 2015

Funktionalanalysis II: Inverse Probleme
Übungen Sommersemester 2015
12. Blatt

Abgabe bis Donnerstag, 09. Juli 2015 vor dem Beginn der Vorlesung.

Aufgabe 45: (4 Punkte)

Sei $A \in \mathcal{K}(X,Y)$ mit den zugehörigen Räumen $\{X_\nu\}_{\nu \geq 0}$.
Beweisen Sie:

a) Für $x \in X_{\max\{\nu,\mu\}}$ mit $\mu, \nu \geq 0$ und für $\vartheta \in [0,1]$ ist

$$\|x\|_{\vartheta\nu+(1-\vartheta)\mu} \leq \|x\|_\nu^\vartheta \, \|x\|_\nu^{1-\vartheta} \, .$$

b) Für $x \in X_\nu$ mit $\nu \geq \mu \geq 0$ ist

$$\|x\|_\mu \leq \|A\|^{\nu-\mu} \|x\|_\nu \, .$$

Aufgabe 46: (2 Punkte)

Sei $A \in \mathcal{K}(X,Y)$ mit den zugehörigen Räumen $\{X_\nu\}_{\nu \geq 0}$ sowie $g \in Y$ und $\varepsilon > 0$. Seien ferner $f_1, f_2 \in X_\nu$ approximative Lösungen von $Af = g$, so dass $\|Af_j - g\|_Y \leq \varepsilon$ für $j \in \{1,2\}$. Zeigen Sie, dass dann

$$\|f_1 - f_2\|_X \leq e_\nu\big(2\varepsilon, 2\max\{\|f_1\|_\nu, \|f_2\|_\nu\}\big)$$

gilt.

Aufgabe 47: (4 Punkte)

Sei $A \in \mathcal{K}(X,Y)$ und $\{F_t\}_{t>0}$ ein regularisierender Filter. Zu $p_t(\sigma) := 1 - \sigma F_t(\sigma)$ und zu $\mu > 0$ gebe es ein $t_0 > 0$ und eine Funktion $\omega_\mu :]0, t_0] \longrightarrow \mathbb{R}$, so dass

$$\sup_{0 \leq \sigma \leq \|A\|^2} \left(\sigma^{\frac{\mu}{2}} \, |p_t(\sigma)|\right) \leq \omega_\mu(t) \quad \forall t \in]0, t_0] \, .$$

Es sei $\omega_\mu(t) = \mathcal{O}(t^{\frac{\mu}{2}})$ und $M(t) = \mathcal{O}(\frac{1}{t})$ für $t \longrightarrow 0+$, wobei $M(t) = \sup\big\{ \, | \, F_t(\sigma) \, | \, : 0 \leq \sigma \leq \|A\|^2 \big\}$. Zur Parameterwahl $\gamma : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ gebe es Konstanten $C_\gamma, C_\Gamma > 0$, so dass

$$C_\gamma \left(\frac{\varepsilon}{\rho}\right)^{\frac{2}{\mu+1}} \leq \gamma(\varepsilon) \leq C_\Gamma \left(\frac{\varepsilon}{\rho}\right)^{\frac{2}{\mu+1}}$$

für hinreichend kleine $\varepsilon, \rho > 0$. Ferner sei $R_t := F_t(A^*A)A^*$.
Zeigen Sie, dass dann $(\{R_t\}_{t>0}, \gamma)$ ein ordnungsoptimales Regularisierungsverfahren für A^+ bezüglich X_μ ist.

Aufgabe 48: (6 Punkte)

Da das Newton-Verfahren für nichtlineare Gleichungssysteme quasi unschlagbar gut ist, bietet es sich an, eine analoge Version für den unendlich–dimensionalen Fall zu entwickeln: Sei $A : \mathcal{D}(A) \longrightarrow Y$, $\mathcal{D}(A) \subset X$, ein (nichtlinearer) Operator zwischen den Banachräumen X und Y und $A' : X \longrightarrow \mathcal{L}(X, Y)$ dessen Fréchet-Ableitung (siehe Definition 2.2.21), so dass $A'(x_0) \in \mathcal{L}(X, Y)$ die Fréchet-Ableitung von A in $x_0 \in X$ ist. Wir können A somit linearisieren zu

$$A(x_0 + h) \approx A(x_0) + A'(x_0)h.$$

Ist nun das nicht–lineare inverse Problem $Ax = y$ zu lösen, so würde das Newton-Verfahren hierzu wie folgt aussehen: Ist $x_n \in X$ als Näherung aus Schritt n gegeben, so sollte

$$y = A(x_n + h_n) \approx A(x_n) + A'(x_n)h_n$$

gelten. Wir suchen also $h_n \in X$, so dass

$$A'(x_n)h_n = y - A(x_n) \tag{1}$$

und setzen $x_{n+1} := x_n + h_n$. Dass damit aber noch nicht alle Schwierigkeiten beseitigt sind, zeigen die folgenden Gegenbeispiele von E. Schock (prüfen Sie sie nach!):

a) Sei $(\mathrm{c}_0, \|\cdot\|_\infty)$ der Banachraum aller Nullfolgen, $Q := \big\{(\xi_n) \in \mathrm{c}_0 \,|\, \xi_n > 0\, \forall n\big\}$ und

$$\begin{aligned} A : Q &\mapsto Q \\ (\xi_n) &\mapsto (\xi_n^2) \end{aligned}$$

ein gegebener Operator. Dann existiert A^{-1} und ist stetig, aber $A'(x)$ ist kompakt für alle $x \in Q$. Warum ist das ein Problem?

b) Sei $a > 0$ und $f \in \mathrm{C}^{(2)}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ eine Funktion, so dass

$$f(t) \begin{cases} = a\ , & t \le a \\ \in [a, 2a], & a < t < 2a \\ = 2a\ , & 2a \le t\ . \end{cases}$$

Dann sei $A : \ell^2 \longrightarrow \ell^2$ definiert durch

$$A\left((\xi_n)_{n\ge1}\right) := \left(\frac{1}{n} f(\xi_n)\right)_{n\ge1} .$$

Dann besitzt A keine stetige Inverse, aber jedes $A'(x), x \in \ell^2$, hat eine stetige Moore–Penrose-Inverse. Was bedeutet das?