Universität Siegen
Department Mathematik
Arbeitsgruppe Geomathematik

Prof. Dr. V. Michel
S. Orzlowski, M. Sc.
23. April 2015

Funktionalanalysis II: Inverse Probleme
Übungen Sommersemester 2015
3. Blatt

Abgabe bis Donnerstag, 30. April 2015, vor Beginn der Vorlesung.

Aufgabe 9: (4 Punkte)

Beweisen Sie: Wenn der inverse Operator T^{-1} eines linearen abgeschlossenen Operators T von einem Banachraum X in einen Banachraum Y existiert, so ist er auch linear und abgeschlossen.

Aufgabe 10: (2 Punkte)

Sei X ein normierter Raum und $M \subset X$ schwach beschränkt, d. h. für jedes $x^* \in X^*$ gilt $\sup\limits_{x \in M} |x^*(x)| < +\infty$. Für jedes $x \in M$ ist die Abbildung f_x definiert durch

$$f_x \colon X^* \to \mathbb{K}, \qquad x^* \mapsto x^*(x).$$

Untersuchen Sie Eigenschaften dieser Familie von Abbildungen um zu zeigen, dass M beschränkt (bezüglich der Norm $\sup\limits_{x \in M} \|x\| < +\infty$) ist.

Aufgabe 11: (2 Punkte)

Zeigen Sie, mit Hilfe der ℓ^p-Räume für $1 < p < +\infty$, dass eine schwach konvergente Folge nicht notwendigerweise konvergent ist.

Aufgabe 12: (4 Punkte)

Sei $b_0 > 0$ eine gegebene Konstante, die sogenannte „Abtastrate“. Für eine Funktion $\psi \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ wird eine Familie von Funktionen $\{\psi_{b_0;j,k}\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ durch

$$\psi_{b_0;j,k}(t) := 2^{\frac{j}{2}}\psi(2^j t - kb_0), \quad t \in \mathbb{R}$$

definiert. Die Integral-Wavelet-Transformation (IWT) ist gegeben durch

$$\begin{aligned} W_\psi \colon \mathrm{L}^2(\mathbb{R}) &\to \ell^2(\mathbb{Z}^2) \\ f &\mapsto (\langle f, \psi_{b_0;j,k}\rangle_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R})})_{j,k\in\mathbb{Z}}, \end{aligned}$$

wobei $\ell^2(\mathbb{Z}^2)$ der Hilbertraum aller Folgen $(a_{j,k})_{j,k\in\mathbb{Z}}$ mit $\sum\limits_{j=-\infty}^{+\infty}\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty}|a_{j,k}|^2 < +\infty$ versehen mit dem Skalarprodukt

$$\langle (a_{j,k}), (b_{j,k})\rangle := \sum_{j=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_{jk}\overline{b_{jk}}$$

ist. Existieren positive Konstanten A, B, so dass die Abschätzung

$$A\|f\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R})} \leq \sum_{j,k\in\mathbb{Z}} |\langle f, \psi_{b_0;j,k}\rangle|^2 \leq B\|f\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R})}$$

für alle $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ gilt, so nennt man die Familie $\{\psi_{b_0;j,k}\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ ein Frame.
Beweisen Sie: Wenn die Familie $\{\psi_{b_0;j,k}\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ ein Frame ist, dann besitzt W_ψ eine stetige Inverse auf ihrem Bild, so dass

$$f = \sum_{j,k\in\mathbb{Z}} \langle f, \psi_{b_0;j,k}\rangle_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R})}\tilde{\psi}_{b_0;j,k} \quad \forall\ f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}) \tag{1}$$

für ein geeignetes System von Funktionen $\{\tilde{\psi}_{b_0;j,k}\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$, der sogenannte „duale “ Frame, gilt.
Hinweis: Untersuchen Sie die Reihe

$$\sum_{j,k\in\mathbb{Z}} \langle f, \psi_{b_0;j,k}\rangle_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R})}\ \psi_{b_0;j,k},$$

um die Gleichung (1) herzuleiten.

Aufgabe 13: (4 Punkte)

Sei $\psi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\psi(t) = \begin{cases} 1, & \text{falls } 0 \leq t < \frac{1}{2}, \\ -1, & \text{falls } \frac{1}{2} \leq t < 1, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und $\psi_{j,k} \coloneqq \psi_{1;j,k}$ wie in Aufgabe 12.

a) Zeigen Sie, dass $\{\psi_{j,k}\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ ein Orthonormalsystem in $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ ist.

b) Zeigen Sie, dass $\{\psi_{j,k}\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ ein Frame mit Framekonstanten $A = B = 1$ (ein sogenannter straffer (tight) Frame) ist.

c) Bestimmen Sie einen geeigneten dualen Frame $\{\tilde{\psi}_{j,k}\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$, so dass (1) in Aufgabe 12 gültig ist und $\{\psi_{j,k}\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ zusammen mit den Funktionalen $\{f_{j,k}\}_{j,k\in\mathbb{Z}} \subset (\mathrm{L}^2(\mathbb{R}))^*$, gegeben durch

$$f_{j,k}(g) \coloneqq \langle g, \tilde{\psi}_{j,k}\rangle_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R})} \forall g \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}),$$

ein Biorthonormalsystem ist.