Universität Siegen
Department Mathematik
Arbeitsgruppe Geomathematik

Prof. Dr. V. Michel
S. Orzlowski, M. Sc.
30. April 2015

Funktionalanalysis II: Inverse Probleme
Übungen Sommersemester 2015
4. Blatt

Abgabe bis Donnerstag, 07. Mai 2015, vor Beginn der Vorlesung.

Satz: Sei X ein normierter Raum und $K \subset X$ nichtleer, abgeschlossen und konvex. Dann gibt es zu jedem $y \notin K$ eine stetige Linearform f auf X und ein $\alpha \in \mathbb{R}$ mit

$$\operatorname{Re} f(y) < \alpha < \operatorname{Re} f(x), \qquad \forall x \in K.$$

Aufgabe 14: (0 Punkte)

Beweisen Sie:

a) Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine schwach gegen $x \in X$ konvergente Folge, dann existiert eine Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ von konvexen Kombinationen der Elemente x_n, die stark gegen x konvergiert.

   Hierbei ist y eine konvexe Kombination wenn

$$y = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k x_k \quad \text{mit} \quad \sum_{k=1}^{N} \lambda_k = 1 \qquad \text{und} \qquad \lambda_k \geq 0 \quad k = 1, \ldots, N.$$

b) Sei K eine konvexe Teilmenge des normierten Raums $(X, \|\cdot\|)$. Ist $x \in X$ schwacher Grenzwert einer Folge aus K, so ist auch x starker Grenzwert einer Folge aus K.

Aufgabe 15: (4 Punkte)

Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ wird eine schwache Cauchyfolge genannt, wenn die Zahlenfolge $(x^*(x_n))_{n\in\mathbb{N}_0}$ für jedes $x^* \in X^*$ eine Cauchyfolge ist.
Beweisen Sie: Eine schwache Cauchyfolge ist beschränkt. Außerdem gilt

$$\|x\| \leq \liminf \|x_n\|,$$

falls $x_n \rightharpoonup x$.

Aufgabe 16: (4 Punkte)

Sei X ein reflexiver Banachraum und $K \subset X$ eine abgeschlossene, konvexe und nichtleere Teilmenge.
Zeigen Sie: Für jedes feste $x \in X$ gibt es stets (mindestens) ein $y \in K$, so dass

$$\|x - y\| = \inf_{z\in K} \|x - z\|$$

gilt.
Hinweis: Benutzen Sie Aufgaben 14 und 15.

Aufgabe 17: (4 Punkte)

Sei $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Hilbertraum. Ein linearer Operator $A \colon X \to X$ heißt symmetrisch, falls $\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle$ für alle $x, y \in X$. Beweisen Sie: Ein symmetrischer Operator ist immer stetig.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass der Operator abgeschlossen ist.