Universität Siegen
Department Mathematik
Arbeitsgruppe Geomathematik

Prof. Dr. V. Michel
S. Orzlowski, M. Sc.
14. Mai 2015

Funktionalanalysis II: Inverse Probleme
Übungen Sommersemester 2015
6. Blatt

Abgabe bis Donnerstag, 21. Mai 2015, zu Beginn der Vorlesung.

Seien $(u_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(v_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ vollständige Orthonormalsysteme in einem Hilbertraum $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle_X)$ beziehungsweise $(Y, \langle\cdot,\cdot\rangle_Y)$ und $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \subset \mathbb{K}$ eine gegebene Folge. Der lineare Operator $A\colon X \to Y$ sei definiert durch

$$Ax := \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \langle x, u_n\rangle_X v_n, \quad x \in X. \tag{1}$$

Aufgabe 22: (4 Punkte)

Sei A definiert wie in (1) und kompakt und seien zusätzlich alle λ_n positiv. Für $J \in \mathbb{N}$ sei der Operator $B_J\colon Y \to X$ definiert durch

$$B_J y := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_n}{\lambda_n^2 + 2^{-J}} \langle y, v_n\rangle_Y \, u_n, \quad y \in Y.$$

a) Beweisen Sie, dass jedes B_J stetig ist.

b) Zeigen Sie, dass B_J für $J \to +\infty$ punktweise gegen A^{-1} auf $A(X)$ konvergiert (obwohl A^{-1} unstetig ist).

Aufgabe 23: (4 Punkte)

Angenommen A aus (1) sei kompakt und $X = Y$. Darüber hinaus sei A selbstadjungiert. Beschreiben Sie die Räume $N(\lambda)$ und $R(\lambda)$ mit $X = R(\lambda) \oplus N(\lambda)$, welche durch den Spektralsatz für kompakte Operatoren auf Banachräumen gegeben sind.

Aufgabe 24: (8 Punkte)

Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche sind falsch? Begründen Sie Ihre Antwort. Falls Aussagen einem Satz aus der Vorlesung entsprechen, benennen Sie den Satz. Falls es sich um Spezialfälle handelt, begründen Sie dies. Andernfalls beweisen Sie die Aussage oder geben Sie ein Gegenbeispiel an.

a) Jede lineare Abbildung ist stetig.

b) Eine kompakte Teilmenge eines metrischen Raums ist immer beschränkt und abgeschlossen.

c) ℓ^p, L^p für $1 \leq p \leq +\infty$, $\mathrm{C}[a,b]$, $\mathrm{B}[a,b]$ und $\mathrm{BV}[a,b]$ sind Beispiele eines Hausdorffraums.

d) Eine offene Abbildung $A\colon X \to Y$, wobei X und Y normierte Räume sind, bildet abgeschlossene Mengen in X in abgeschlossene Mengen in $A(X)$ ab.

e) Eine stetige lineare Abbildung $f\colon Y \to \mathbb{K}$ auf einem linearen Teilraum Y eines normierten Raumes X kann immer fortgesetzt werden zu einer stetigen linearen Abbildung auf dem ganzen Raum mit gleicher Operatornorm.

f) Seien X und Y normierte Räume. Wenn $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ bijektiv ist, dann existiert eine Inverse $A^{-1} \in \mathcal{L}(Y,X)$.

g) Jede (stark) konvergente Folge ist auch schwach konvergent.

h) Jeder metrische Raum besitzt eine, bis auf Isometrie, eindeutige Vervollständigung.

i) Stetige Abbildungen zwischen metrischen Räumen bilden Cauchyfolgen auf Cauchyfolgen ab.

j) ℓ^p ist von zweiter Kategorie für $1 \leq p \leq +\infty$.

k) Jede abgeschlossene lineare Abbildung ist stetig.

l) Sei $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}(\mathrm{C}[a,b], \mathrm{L}^2[a,b])$ eine gegebene Folge und $\gamma > 0$ eine Konstante, sodass $\|T_n\| < \gamma$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Falls für jedes Polynom p auf $[a,b]$ die Konvergenz $T_n p \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} Tp$ in $\mathrm{L}^2[a,b]$ gilt mit der linearen Abbildung $T\colon \mathrm{C}[a,b] \to \mathrm{L}^2[a,b]$, dann ist T stetig und $T_n f \to Tf$ für $n \to \infty$ gilt für alle $f \in \mathrm{C}[a,b]$.