Universität Siegen
Department Mathematik
Arbeitsgruppe Geomathematik

Prof. Dr. V. Michel
S. Orzlowski, M. Sc.
11. Juni 2015

Funktionalanalysis II: Inverse Probleme
Übungen Sommersemester 2015
9. Blatt

Abgabe bis Donnerstag, 18. Juni 2015 vor dem Beginn der Vorlesung.

Aufgabe 33: (4 Punkte)

Beweisen Sie folgende Aussage: Zu jedem $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ gibt es genau einen Operator $B \colon \mathcal{D}(A^+) \to X$, der die Moore-Penrose-Axiome erfüllt:

$$ABA = A, \quad BAB = B, \quad BA = P_{\overline{\mathcal{R}(B)}}, \quad AB = P_{\overline{\mathcal{R}(A)}}.$$

Dieser Operator ist die Moore-Penrose-Inverse: $B = A^+$.

Aufgabe 34: (4 Punkte)

Sei $A \in \mathcal{L}(X)$ injektiv und selbstadjungiert.

a) Begründen Sie, warum $\mathcal{R}(A)$ dicht in X ist.

b) Es existiere außerdem ein $\gamma > 0$, so dass $\langle Ax, x\rangle \geq \gamma \|x\|^2$ für alle $x \in X$ gilt. Begründen Sie, warum dann A eine stetige Inverse $A^{-1} \colon X \to X$ besitzt mit $\|A^{-1}\| \leq \frac{1}{\gamma}$.

Aufgabe 35: (4 Punkte)

Sei $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Zeigen Sie, dass folgendes gilt:

a) Zu jedem $\alpha > 0$ und $y \in Y$ existiert genau ein Minimierer $x_\alpha \in X$ von

$$Q_\alpha(x) \coloneqq \|Tx - y\|_Y^2 + \alpha \|x\|_X^2.$$

Dieser ist gegeben durch $x_\alpha = (T^*T + \alpha I)^{-1} T^* y$.

b) Ist T injektiv und $y \in \mathcal{R}(T)$, so dass $x_0 \in X$ die eindeutige Lösung von $Tx = y$ ist, und ist $(x_\alpha)_{\alpha > 0}$ die Familie aus Teil a) zu diesem y, so gilt:

$$\lim_{\alpha \to 0^+} x_\alpha = x_0$$

in X.

Aufgabe 36: (4 Punkte)

Sei $A\colon \mathcal{D}(A) \to Y$ ein (nicht-linearer) Operator mit $\mathcal{D}(A) \subset X$, wobei X und Y wie üblich Hilberträume sind mit der Einschränkung, dass X unendlich-dimensional, aber separabel, ist. Ferner sei A kompakt (Definition analog zum linearen Fall), stetig und schwach folgenabgeschlossen, d. h. aus $(x_n) \subset \mathcal{D}(A)$, $x_n \rightharpoonup x \in X$, $A(x_n) \rightharpoonup y \in Y$ folgt $x \in \mathcal{D}(A)$ und $Ax = y$. Zeigen Sie:

a) Aus $x_n \rightharpoonup x \in \mathcal{D}(A)$, $(x_n) \subset \mathcal{D}(A)$ folgt: $\|A(x_n) - A(x)\|_Y \to 0$.

b) Zu jedem $r > 0$ und jedem $f^+ \in \operatorname{int}(\mathcal{D}(A))$ existiert eine Folge $(f_k^r)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(A)$ mit $\|f_k^r - f^+\| < r \ \forall k \in \mathbb{N}$, die nicht gegen f^+ konvergiert, während jedoch $\|A(f_k^r) - A(f^+)\|_Y \to 0$ für $k \to \infty$ gilt.
Anmerkung: Bei nicht-linearen inversen Problemen spricht man in diesem Fall von einem lokal schlecht gestellten Problem. Dass dies unter den gegebenen Voraussetzungen stets der Fall ist, wurde zuerst von Engl, Kunisch und Neubauer gezeigt.