Universität Siegen
Department Mathematik
AG Geomathematik
Univ.-Prof. Dr. V. Michel
Bianca Kretz, M.Sc.

07. Oktober 2019

Übungen zur Vorlesung

Geomathematik

Wintersemester 2019/20
Blatt 1

Abgabe zu Beginn der Vorlesung am **Montag, den 21. Oktober 2019**.

Aufgabe 1: (0,5+1+1+0,5+1=4 Punkte)

Seien $F \in \mathrm{C}^{(2)}(D)$, $f \in \mathrm{C}^{(2)}(E)$, $G \in \mathrm{C}^{(2)}(E)$, $g \in \mathrm{C}^{(1)}(D, \mathbb{R}^n)$ und $H \in \mathrm{C}^{(1)}(D)$ mit $D \subset \mathbb{R}^n$ und $E \subset \mathbb{R}^3$. Rechnen Sie nach, dass folgendes gilt:

(a) div grad $F = \Delta\ F$,

(b) grad div $f = \Delta\ f +$ rot rot f,

(c) div rot $f = 0$,

(d) rot grad $G = 0$,

(e) div $(Hg) = (\nabla H) \cdot g + H$ div g.

Aufgabe 2: (2+2=4 Punkte)

(a) Beweisen Sie die 1. und 2. Greensche Formel mithilfe des Satzes von Gauß.

(b) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

1. $\int_\Omega x_1 e^{x_2 x_3^2} \sin^2 x_3 - \sqrt{x_1^2 + 3 + 2x_3^4}x_2 + x_3 \cos(x_2 x_1) + \frac{1}{4}\ \mathrm{d}\omega(x)$,
2. $\int_\Omega \left(\frac{3}{2}x_3^2 - \frac{1}{2}\right)^2\ \mathrm{d}\omega(x)$

Aufgabe 3: (2+2=4 Punkte)

Zeigen Sie Folgendes:

(a) Sei $y \in \mathbb{R}^3$ und $R > 0$. Dann gilt

$$\int_{B_R(y)} \frac{1}{|x-y|^p}\ \mathrm{d}x = \frac{4\pi}{3-p} R^{3-p}$$

für alle $p < 3$.

(b)
$$\int_{B_R(0)} \frac{1}{|x-y|^p} \, \mathrm{d}x \leq \frac{4\pi}{3-p}(R+|y|)^{3-p}$$

für $y \in \mathbb{R}^3$, $R > 0$ und $p < 3$, wobei $B_R(0) \subset \mathbb{R}^3$.

Aufgabe 4: (2+2=4 Punkte)

Zeigen Sie, dass Folgendes gilt:

(a) Sei $y \in \mathbb{R}^n$ beliebig mit $n \geq 2$. Dann ist
$$\mathbb{R}^n \setminus \{y\} \to \mathbb{R}, \ x \mapsto \frac{1}{|x-y|^{n-2}}$$
harmonisch.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}^2 \setminus \{y\} \ni x \mapsto \log|x-y|$ harmonisch ist.