

Übungen zur Vorlesung  
**Geomathematik**  
Wintersemester 2019/20  
Blatt 3

Abgabe zu Beginn der Vorlesung am **Montag, den 04. November 2019**.

**Aufgabe 9:** (4 Punkte)

Für eine Funktion  $U \in C^{(2)}(G)$ , wobei  $G \subset \mathbb{R}^3$  ein Gebiet mit  $0 \notin G$  ist, definiert man die Kelvin-Transformierte als

$$U^*(x) := \frac{1}{|x|} U\left(\frac{x}{|x|^2}\right)$$

für alle  $x \in \mathbb{R}^3$  mit  $\frac{x}{|x|^2} \in G$ . Zeigen Sie, dass dann

$$\Delta U^*(x) = \frac{1}{|x|^5} (\Delta U)\left(\frac{x}{|x|^2}\right)$$

gilt, wobei  $(\Delta U)\left(\frac{x}{|x|^2}\right)$  so zu verstehen ist, dass erst  $\Delta U$  bestimmt und dann  $\frac{x}{|x|^2}$  eingesetzt wird.

**Aufgabe 10:** (4 Punkte)

Der Gauß'sche Mittelwertsatz gilt auch im  $\mathbb{R}^1$ . Formulieren Sie eine entsprechende analoge Aussage und beweisen Sie sie! Geben Sie außerdem eine allgemeine explizite Formel für alle harmonischen Funktionen auf einem Gebiet im  $\mathbb{R}^1$  an.

**Aufgabe 11:** (4 Punkte)

Zeigen Sie: Ist  $U \in C^{(2)}\left(\overline{B_R(0)}\right)$  mit  $R > 0$  und  $B_R(0) \subset \mathbb{R}^3$ , so gilt:

$$U(x^0) = \frac{1}{4\pi R^2} \int_{S_R(x^0)} U(x) \, d\omega(x) - \frac{1}{4\pi} \int_{B_R(x^0)} \Delta U(x) \left( \frac{1}{|x - x^0|} - \frac{1}{R} \right) dx$$

für alle  $x^0 \in B_R(x^0)$ . (Anmerkung: Diese Aussage ist eine Verschärfung des Gauß'schen Mittelwertsatzes.)

**Aufgabe 12:** (4 Punkte)

Die Lotrichtung (engl. plumb-line) wird durch die (umgekehrte) Richtung des Gravitationsfelds gegeben. Formal definiert man

$$n(x) := -\frac{\nabla V(x)}{|\nabla V(x)|}$$

in allen  $x \in \mathbb{R}^3$ , in denen  $|\nabla V(x)| \neq 0$ , wobei  $V$  das Gravitationspotential ist. Nimmt man nun einen beliebigen, aber festen Punkt  $x^0 \in \mathbb{R}^3$  mit  $|\nabla V(x^0)| \neq 0$ , so ist die "plumb-line" durch  $x^0$  gegeben durch einen Weg  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  ( $I \subset \mathbb{R}$  Intervall) mit  $x^0 \in \varphi(I)$  und

$$\varphi'(s) = n(\varphi(s)) \quad \text{für alle } s \in I,$$

wobei der Parameter  $s$  die Bogenlänge ist. Zeigen Sie, dass die Krümmung der "plumb-line" Folgendes erfüllt:

$$\varphi''(s) = (|\nabla V|^{-1} \nabla^* |\nabla V|) \Big|_{\varphi(s)},$$

wobei  $\nabla^*$  der Oberflächengradient zur Äquipotentialfläche  $\{y \in \mathbb{R}^3 \mid V(y) = c\}$ ,  $c = V(\varphi(s))$  fest, ist, d.h.  $\nabla^* F = \nabla F - (n \cdot \nabla F)n$ . (Hinweis: Da die Euklidische Norm  $|\nabla V|$  eine Wurzel enthält, versuchen Sie,  $\nabla^* |\nabla V|^2$  zu benutzen.)