Universität Siegen
Department Mathematik
AG Geomathematik
Univ.-Prof. Dr. V. Michel
Bianca Kretz, M.Sc.

11. November 2019

Übungen zur Vorlesung

Geomathematik

Wintersemester 2019/20
Blatt 5

Abgabe zu Beginn der Vorlesung am **Montag, den 18. November 2019**.

Aufgabe 17: (4 Punkte)

Sei Σ eine reguläre Fläche, $F \in \mathrm{C}(\Sigma)$ eine gegebene Funktion und $x_0 \in \Sigma$ ein gegebener Punkt. Zeigen Sie: Wenn $F(x_0) = 0$ und P_{d} das zu F gehörige Doppelschicht-Potential ist, dann ist P_{d} stetig in x_0.

Aufgabe 18: (1+3=4 Punkte)

Seien $D \subset \mathbb{R}^n$ und $E \subset \mathbb{R}^m$ kompakte und nicht-leere Mengen und $K : E \times D \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Der zugehörige Fredholm'sche Integraloperator sei definiert durch $\mathcal{T} : \mathrm{C}(D) \to \mathrm{C}(E)$ mit

$$(\mathcal{T}F)(x) := \int_D K(x,y)F(y)\ \mathrm{d}y, \quad x \in E,\ F \in \mathrm{C}(D).$$

a) Zeigen Sie, dass der Operator $\mathcal{T}$ beschränkt ist.

b) Zeigen Sie, dass $\mathcal{T}$ ein kompakter Operator ist. (Hinweis: Benutzen Sie den Satz von Arzelà-Ascoli.)

Aufgabe 19: (4 Punkte)

Seien $K \in \mathrm{C}^{(1)}([a,b] \times [a,b])$, $F \in \mathrm{C}^{(0)}([a,b])$ und $a < b$. Beweisen Sie, dass

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int\limits_a^x K(x,y)F(y)\ \mathrm{d}y = \int\limits_a^x \frac{\partial K(x,y)}{\partial x} F(y)\ \mathrm{d}y + K(x,x)F(x)$$

für alle $x \in]a,b[$.

Aufgabe 20: (4 Punkte)

Bestimmen Sie eine Lösung der Volterra-Integral-Gleichung erster Ordnung:

$$\int_0^x \left((x-y)^2 - 2\right) F(y)\,\mathrm{d}y = -4x, \quad x \geq 0\ .$$

Nehmen Sie an, dass dieses Problem lösbar ist. (Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe 19.)