Universität Siegen
Department Mathematik
AG Geomathematik
Univ.-Prof. Dr. V. Michel
Bianca Kretz, M.Sc.

02. Dezember 2019

Übungen zur Vorlesung

Geomathematik

Wintersemester 2019/20
Blatt 8

Abgabe zu Beginn der Vorlesung am **Montag, den 09. Dezember 2019**.

Aufgabe 29: (4 Punkte)

Die Datei 'GravPot.dat' enthält Werte des Gravitationspotentials der Erde auf dem folgenden Punktgitter:

$$\begin{aligned} \varphi_i &= \frac{i}{90}\pi\ , \quad i = -90, \ldots, 90 \\ \vartheta_j &= \frac{j}{90}\pi\ , \quad j = -45, \ldots, 45 \end{aligned}$$

Die Werte sind als $(91 * 181) \times 3$-Matrix gegeben, wobei die erste Spalte φ entspricht, die zweite Spalte ϑ und die dritte Spalte dem Potential. Zeichnen Sie die Daten mit Hilfe der mapping toolbox für die folgenden Projektionen (mit Küstenlinien, colorbar, ...)

- Robinson–Projektion
- Mollweide–Projektion
- Orthographische Projektion

und zeichnen Sie zusätzlich das Potential für die Region von Südamerika.

Aufgabe 30: (4 Punkte)

a) Rechnen Sie nach, dass der Laplace-Operator in 2-dimensionalen Kreiskoordinaten $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ dargestellt werden kann als

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}$$

für zweimal stetig differenzierbare Funktionen U.

b) Verwenden Sie den Separationsansatz $U(x, y) = F(r)Y(\varphi)$ und leiten Sie eine Darstellung für die allgemeine Lösung der Laplace-Gleichung $\Delta U = 0$ auf einer Kreisscheibe $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 \leq R^2\right\}$ im $\mathbb{R}^2$ her.

Aufgabe 31: (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Legendre-Polynome die Rekursionsformel

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllen (Hinweis: Betrachten Sie die Ableitung der Erzeugenden Funktion).

Aufgabe 32: (1+3=4 Punkte)

a) Rechnen Sie die folgende Gleichung für die assoziierten Legendre-Funktionen $P_{n,j}$ nach:

$$P_{n,j}(t) = \sqrt{1-t^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}P_{n,j-1}(t) + (j-1)\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}P_{n,j-1}(t),$$

$t \in]-1,1[,\ n \in \mathbb{N}_0,\ j = 1,\ldots,n.$

b) Zeigen Sie dann, dass

$$\int_{-1}^{1} (P_{n,j}(t))^2 \ \mathrm{d}t = \frac{2}{2n+1}\frac{(n+j)!}{(n-j)!}$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $j = 1,\ldots,n$.