Universität Siegen
Department Mathematik
AG Geomathematik
Univ.-Prof. Dr. V. Michel
Bianca Kretz, M.Sc.

16. Dezember 2019

Übungen zur Vorlesung

Geomathematik

Wintersemester 2019/20
Blatt 10

Abgabe zu Beginn der Vorlesung am **Montag, den 06. Januar 2020**.

Aufgabe 37: (3+1=4 Punkte)

Das so genannte Konzentrationsproblem auf der Sphäre sieht wie folgt aus: Unter allen $F \in \mathrm{Harm}_{0\ldots N}(\Omega)$, d.h. allen $F : \Omega \to \mathbb{R}$ der Form

$$F(\xi) = \sum_{n=0}^{N} \sum_{j=-n}^{n} \langle F, Y_{n,j} \rangle_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \, Y_{n,j}(\xi), \quad \xi \in \Omega,$$

suchen wir ein F, das den Ausdruck

$$\lambda_R(F) := \frac{\|F\|^2_{\mathrm{L}^2(R)}}{\|F\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)}}$$

maximiert. Hierbei ist $R \subset \Omega$ messbar. Zeigen Sie:

a) Es gibt eine Orthonormalbasis $F_1, \ldots, F_d$ mit $d := (N+1)^2$ von $\left(\mathrm{Harm}_{0\ldots N}(\Omega), \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathrm{L}^2(\Omega)}\right)$, so dass $\lambda_R(F_1) \geq \cdots \geq \lambda_R(F_d)$, wobei eine Matrix M existiert, so dass für jede Funktion F_k ihr Koeffizientenvektor $\left(\langle F_k, Y_{n,j} \rangle_{\mathrm{L}^2(\Omega)}\right)_{n=0,\ldots,N,\ j=-n,\ldots,n}$ ein Eigenvektor von M zum Eigenwert $\lambda_R(F_k)$ ist. (Geben Sie auch eine Formel für die Komponenten von M an).

b) Ist $R = \left\{\xi \in \Omega \;\middle|\; \xi \cdot \varepsilon^3 \geq b\right\}$, $b \in]-1,1[$ fest, eine sphärische Kappe um den Nordpol, so hat M eine Blockstruktur, wenn die $Y_{n,j}$ die „fully normalized spherical harmonics“ sind.

Aufgabe 38: (4 Punkte)

Zeigen Sie: Wenn V die Bedingungen zur Lösbarkeit des inversen Gravimetrie-Problems erfüllt, dann ist die eindeutige Lösung $F \in \mathrm{C}^{(2)}(B_R(0))$ von

$$G \int_{B_R(0)} \frac{F(x)}{|x - \cdot|} \, \mathrm{d}x = V \text{ in } \mathbb{R}^3 \setminus \overline{B_R(0)}, \;\; \Delta_x(F(x)\,|x|^{-p}) = 0 \text{ in } B_R(0),$$

$p \in \mathbb{R}_0^+$ fest, gegeben durch

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+p+3) \frac{(R+\varepsilon)^n}{R^{2n+p+3}} \frac{2n+1}{4\pi G} \, |x|^{n+p} \sum_{j=1}^{2n+1} \left\langle V|_{S_{R+\varepsilon}(0)}, Y_{n,j}^{R+\varepsilon} \right\rangle_{\mathrm{L}^2(S_{R+\varepsilon}(0))} Y_{n,j}\left(\frac{x}{|x|}\right),$$

wobei die Reihe in $\mathrm{L}^2(B_R(0))$ konvergiert.

Aufgabe 39: (4 Punkte)

Sei eine Kugelschale gegeben durch

$$0 \leq \tau \leq |x| \leq \tau + \delta \leq R, \;\; \delta > 0.$$

Wenn F^{L} eine zweimal integrierbare Dichtefunktion mit der Form

$$F^{\mathrm{L}}(x) = \begin{cases} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \sum\limits_{j=1}^{2n+1} F_{n,j}^{\mathrm{L}} Y_{n,j}\left(\frac{x}{|x|}\right) & \text{innerhalb der Kugelschale,} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und V das dazugehörige Gravitationspotential ist, dann gilt

$$F_{n,j}^{\mathrm{L}} = \frac{(2n+1)(n+3)}{4\pi G} \frac{(R+\varepsilon)^n}{(\tau+\delta)^{n+3} - \tau^{n+3}} \left\langle V|_{S_{R+\varepsilon}(0)}, Y_{n,j}^{R+\varepsilon} \right\rangle_{\mathrm{L}^2(S_{R+\varepsilon}(0))}.$$

Aufgabe 40: (4 Punkte)

Seien $(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{X}})$ und $(\mathcal{Y}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{Y}})$ Hilberträume und $\mathcal{T} \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. Zeigen Sie: Die bijektive Abbildung $\mathcal{T}\big|_{(\ker\mathcal{T})^\perp} : (\ker\mathcal{T})^\perp \to \mathcal{T}(\mathcal{X})$ hat genau dann eine stetige Inverse, wenn das Bild $\mathcal{T}(\mathcal{X})$ abgeschlossen in $\mathcal{Y}$ ist.