Universität Siegen
Department Mathematik
AG Geomathematik
Univ.-Prof. Dr. V. Michel
Bianca Kretz, M.Sc.

06. Januar 2020

Übungen zur Vorlesung

Geomathematik

Wintersemester 2019/20
Blatt 11

Abgabe zu Beginn der Vorlesung am **Montag, den 13. Januar 2020**.

Aufgabe 41: (4 Punkte)

Verwenden Sie den Separationsansatz $U(x) = F(r)G(\varphi)$ bzgl. Polarkoordinaten auf dem Kreis $B_R(0) \subset \mathbb{R}^2$, um die Helmholtz-Gleichung

$$\Delta U + \omega^2 U = 0, \quad \omega \in \mathbb{R}^+ \text{ fest},$$

zu lösen. Geben Sie die allgemeine Lösung für G an und zeigen Sie, dass alle

$$J_k(s) := \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{(k+r)!r!} \left(\frac{s}{2}\right)^{2r+k}, \quad s \in \mathbb{R}^+,$$

mit $k \in \mathbb{N}_0$ als Lösungen für F mit $F(r) = J_k(\omega r)$ geeignet sind.

Aufgabe 42: (4 Punkte)

Der Weak Functional Matching Pursuit (WFMP) unterscheidet sich vom FMP lediglich dadurch, dass vorab ein Parameter $\rho \in]0,1]$ gewählt wird und bei der Wahl von d_{n+1} nur gefordert wird, dass

$$\frac{\left|\langle y - \mathcal{T}F_n, \mathcal{T}d_{n+1}\rangle_{\mathcal{Y}}\right|}{\|\mathcal{T}d_{n+1}\|_{\mathcal{Y}}} \geq \rho \, \frac{\left|\langle y - \mathcal{T}F_n, \mathcal{T}d\rangle_{\mathcal{Y}}\right|}{\|\mathcal{T}d\|_{\mathcal{Y}}} \quad \forall d \in \mathcal{D}.$$

Die Formel für α_{n+1} bleibt unverändert.
Zeigen Sie, dass weiterhin $\left(\|y - \mathcal{T}F_n\|_{\mathcal{Y}}\right)_n$ eine monoton fallende und konvergente Folge ist, während nun $\|y - \mathcal{T}F_n\|_{\mathcal{Y}} \leq \|y\|_{\mathcal{Y}} \left[1 - \rho^2 I(\tau)^2\right]^{n/2}$ gilt.

Aufgabe 43: (4 Punkte)

Seien $(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{X}})$ und $\left(\mathcal{Y}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{Y}}\right)$ Hilberträume. Zeigen Sie, dass dann $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ mit

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} \coloneqq \langle x_1, x_2\rangle_{\mathcal{X}} + \langle y_1, y_2\rangle_{\mathcal{Y}}\,,$$

$x_1, x_2 \in \mathcal{X},\ y_1, y_2 \in \mathcal{Y}$, ein Hilbertraum ist.

Aufgabe 44: (4 Punkte)

Seien $(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{X}})$ und $\left(\mathcal{Y}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{Y}}\right)$ reelle Hilberträume und $\mathcal{T} : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ ein linearer und stetiger Operator. Wir betrachten das inverse Problem $\mathcal{T}F = y$ für gegebenes $y \in \mathcal{Y}$. Zeigen Sie, dass $F \in \mathcal{X}$ genau dann das Funktional

$$J_\lambda(F) \coloneqq \|\mathcal{T}F - y\|_{\mathcal{Y}}^2 + \lambda \|F\|_{\mathcal{X}}^2$$

zu einem festen $\lambda \in \mathbb{R}^+$ minimiert, wenn

$$(\mathcal{T}^*\mathcal{T} + \lambda\mathcal{I})\,F = \mathcal{T}^*y, \tag{1}$$

wobei $\mathcal{I}$ die Identität auf $\mathcal{X}$ ist. Begründen Sie auch, warum (1) höchstens eine Lösung hat.