Universität Siegen
Department Mathematik
AG Geomathematik
Univ.-Prof. Dr. V. Michel
Bianca Kretz, M.Sc.

13. Januar 2020

Übungen zur Vorlesung

Geomathematik

Wintersemester 2019/20
Blatt 12

Abgabe zu Beginn der Vorlesung am **Montag, den 20. Januar 2020**.

Aufgabe 45: (4 Punkte)

Zeigen Sie die folgenden Varianten der Sätze von Gauß und Stokes auf der Sphäre:
Für alle $F \in \mathrm{C}^{(1)}(\Omega)$ und alle tangentialen Vektorfelder $f \in \mathrm{c}^{(1)}(\Omega)$, d.h. $\xi \cdot f(\xi) = 0$ für alle $\xi \in \Omega$, gilt:

$$\int_\Omega (\nabla^* F(\xi)) \cdot f(\xi) \, \mathrm{d}\omega(\xi) = -\int_\Omega F(\xi) \nabla^* \cdot f(\xi) \, \mathrm{d}\omega(\xi), \tag{1}$$

$$\int_\Omega (\mathrm{L}^* F(\xi)) \cdot f(\xi) \, \mathrm{d}\omega(\xi) = -\int_\Omega F(\xi) \mathrm{L}^* \cdot f(\xi) \, \mathrm{d}\omega(\xi), \tag{2}$$

$$\int_\Omega \nabla^* \cdot f(\xi) \, \mathrm{d}\omega(\xi) = 0, \tag{3}$$

$$\int_\Omega \mathrm{L}^* \cdot f(\xi) \, \mathrm{d}\omega(\xi) = 0. \tag{4}$$

Aufgabe 46: (4 Punkte)

Aus der Konstruktiven Approximation ist bereits bekannt, dass $\mathrm{L}^* \cdot \nabla^* = \nabla^* \cdot \mathrm{L}^* = 0$ und $\nabla^* \cdot \nabla^* = \mathrm{L}^* \cdot \mathrm{L}^* = \Delta^*$ auf $\mathrm{C}^{(2)}(\Omega)$ gilt. Zeigen Sie nun, dass auch noch Folgendes gilt: Wenn $f \in \mathrm{c}^{(1)}(\Omega)$ mit $\mathrm{L}^* \cdot f = 0$ auf Ω, dann existiert eine Funktion $G \in \mathrm{C}^{(2)}(\Omega)$, so dass $f = \nabla^* G$. Ferner gilt dann

$$G(\xi) - G(\eta) = \int_\gamma f(\zeta) \cdot \tau(\zeta) \, \mathrm{d}\omega(\zeta)$$

für alle $\xi, \eta \in \Omega$ und jede hinreichend glatte Jordankurve γ von η nach ξ mit Einheitstangentialvektorfeld τ längs γ.

Aufgabe 47: (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Morse-Feshbach-Vektor-Kugelflächenfunktionen $\left\{y_{n,j}^{(i)}\right\}_{i\in\{1,2,3\},n\geq 0 i,j\in\{-n,\ldots,n\}}$ vollständig in $\mathrm{L}^2(\Omega,\mathbb{R}^3)$ sind. (Anmerkung: Da $\mathrm{c}^{(1)}(\Omega)$ dicht in $\mathrm{L}^2(\Omega,\mathbb{R}^3)$ ist, reicht es, wenn Sie die Vollständigkeit in $\left(\mathrm{c}^{(1)}(\Omega),\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathrm{L}^2(\Omega,\mathbb{R}^3)}\right)$ zeigen.)

Aufgabe 48: (4 Punkte)

Die Edmonds-Vektor-Kugelflächenfunktionen $\tilde{y}_{n,j}^{(i)}$ sind definiert durch

$$\begin{aligned}
\tilde{y}_{n,j}^{(1)} &:= \sqrt{\frac{n+1}{2n+1}}y_{n,j}^{(1)} - \sqrt{\frac{n}{2n+1}}y_{n,j}^{(2)},\\
\tilde{y}_{n,j}^{(2)} &:= \sqrt{\frac{n}{2n+1}}y_{n,j}^{(1)} + \sqrt{\frac{n+1}{2n+1}}y_{n,j}^{(2)},\\
\tilde{y}_{n,j}^{(3)} &:= y_{n,j}^{(3)}
\end{aligned}$$

für $n \in \mathbb{N}$ und $j \in \{-n,\ldots,n\}$. Außerdem gilt $\tilde{y}_{0,0}^{(1)} := y_{0,0}^{(1)}$. Allgemein können wir sagen, dass Formeln wie $ny_{n,j}^{(i)}$ auch für $n=0$ und $i \neq 1$ definiert sind in dem Sinne, dass solche Terme verschwinden.

a) Rechnen Sie nach, dass dieses System orthonormal in $\mathrm{L}^2(\Omega,\mathbb{R}^3)$ ist.

b) Drücken Sie die Gradienten von $H_{n,j}^{\mathrm{int}}$ und $H_{-n-1,j}^{\mathrm{ext}}$ mittels Edmonds-Vektor-Kugelflächenfunktionen aus.