Universität Siegen
Department Mathematik
AG Geomathematik
Univ.-Prof. Dr. V. Michel
Bianca Kretz, M.Sc.

20. Januar 2020

Übungen zur Vorlesung

Geomathematik

Wintersemester 2019/20
Blatt 13

Abgabe zu Beginn der Vorlesung am **Montag, den 27. Januar 2020**.

Aufgabe 49: (4 Punkte)

Sei $0 < \alpha < \beta$ und sei $\Omega_{]\alpha,\beta[} := \left\{x \in \mathbb{R}^3 \middle| \alpha < |x| < \beta\right\}$ eine Kugelschale. Beweisen Sie, dass eine Funktion $f \in \mathrm{c}^{(1)}\left(\Omega_{]\alpha,\beta[}\right)$ mit

$$\nabla \cdot f = 0$$

in $\Omega_{]\alpha,\beta[}$ und

$$\int_{S_{r_1}(0)} f(x) \cdot \frac{x}{|x|} \, \mathrm{d}\omega(x) = 0$$

für einen Radius $r_1 \in]\alpha, \beta[$, immer solenoidal in $\Omega_{]\alpha,\beta[}$ ist.

Aufgabe 50: (4 Punkte)

Die Cauchy-Navier-Gleichung

$$\alpha^2 \text{grad div } U - \beta^2 \text{rot rot } U + \omega^2 U = 0 \tag{1}$$

ist eine grundlegende Gleichung der Seismologie, wobei $\alpha, \beta, \omega \in \mathbb{R}^+$ konstant sind. Sei $U \in \mathrm{c}^{(3)}(\overline{D}),\ D = \Sigma_{\text{int}}$, wobei U und alle seine Ableitungen Hölderstetig sind. Zeigen Sie: U löst (1) genau dann, wenn U zerlegt werden kann in $U = U_\alpha + U_\beta$ mit

$$\begin{aligned} \Delta U_\alpha + \frac{\omega^2}{\alpha^2} U_\alpha = 0, &\quad \text{rot } U_\alpha = 0, \\ \Delta U_\beta + \frac{\omega^2}{\beta^2} U_\beta = 0, &\quad \text{div } U_\beta = 0. \end{aligned}$$

Aufgabe 51: (4 Punkte)

Die Permutation eines Tupels $(a_1, \ldots, a_n)$ ist gerade, wenn sie durch eine gerade Anzahl aufeinanderfolgender paarweiser Vertauschungen von Komponenten aus $(a_1, \ldots, a_n)$ erreicht werden kann. Sonst ist sie ungerade. Demzufolge ist $(1, 2, 6, 5, 4, 3)$ eine gerade Permutation von $(1, 2, 3, 4, 5, 6)$.
Das alternierende Levi-Cività Symbol $\varepsilon_{ijk}; i, j, k \in \{1, 2, 3\}$; wird definiert durch

$$\varepsilon_{ijk} := \begin{cases} 1, & \text{wenn } (i,j,k) \text{ eine gerade Permutation von } (1,2,3) \text{ ist,} \\ -1, & \text{wenn } (i,j,k) \text{ eine ungerade Permutation von } (1,2,3) \text{ ist,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Seien $u, v \in \mathbb{R}^3$ beliebige Vektoren und $w = (w_i)_{i=1,2,3} \in \mathbb{R}^3$ sei gegeben durch

$$w_i := \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} u_j v_k,$$

$i \in \{1, 2, 3\}$.
Beweisen Sie, dass $w = u \times v$.

b) Zeigen Sie, dass das alternierende Levi–Cività Symbol ε_{ijk} die folgenden Gleichungen erfüllt:

(i) $\sum\limits_{i=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}$,

(ii) $\sum\limits_{i,j=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijn} = 2\delta_{kn}$,

(iii) $\sum\limits_{i,j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = 6$.

Aufgabe 52: (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass Δ und L auf $\mathrm{C}^{(3)}(D)$, $D \subset \mathbb{R}^3$ offen, kommutieren, d.h. $\Delta \mathrm{L} G = \mathrm{L} \Delta G$ für alle $G \in \mathrm{C}^{(3)}(D)$. (Benutzen Sie z.B. das alternierende Levi–Cività-Symbol.)