

Übungen zur Vorlesung
Geomathematik
Wintersemester 2020/21
Blatt 1

Abgabe per E-Mail bis **Donnerstag, den 12. November 2020, 16:15 Uhr.**

Aufgabe 1: (0,5+1+1+0,5+1=4 Punkte)

Seien $F \in C^{(2)}(D)$, $f \in C^{(2)}(E)$, $G \in C^{(2)}(E)$, $g \in C^{(1)}(D, \mathbb{R}^n)$ und $H \in C^{(1)}(D)$ mit $D \subset \mathbb{R}^n$ und $E \subset \mathbb{R}^3$. Rechnen Sie nach, dass folgendes gilt:

- (a) $\operatorname{div} \operatorname{grad} F = \Delta F$,
- (b) $\operatorname{grad} \operatorname{div} f = \Delta f + \operatorname{rot} \operatorname{rot} f$,
- (c) $\operatorname{div} \operatorname{rot} f = 0$,
- (d) $\operatorname{rot} \operatorname{grad} G = 0$,
- (e) $\operatorname{div} (Hg) = (\nabla H) \cdot g + H \operatorname{div} g$.

Aufgabe 2: (2+2=4 Punkte)

- (a) Beweisen Sie die 1. und 2. Green'sche Formel mithilfe des Satzes von Gauß.
- (b) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

1. $\int_{\Omega} x_1 e^{x_2 x_3^2} \sin^2 x_3 - \sqrt{x_1^2 + 3} + 2x_3^4 x_2 + x_3 \cos(x_2 x_1) + \frac{1}{4} \, d\omega(x)$,
2. $\int_{\Omega} \left(\frac{3}{2}x_3^2 - \frac{1}{2}\right)^2 \, d\omega(x)$

Aufgabe 3: (2+2=4 Punkte)

Zeigen Sie Folgendes:

- (a) Sei $y \in \mathbb{R}^3$ und $R > 0$. Dann gilt

$$\int_{B_R(y)} \frac{1}{|x-y|^p} \, dx = \frac{4\pi}{3-p} R^{3-p}$$

für alle $p < 3$.

(b)

$$\int_{B_R(0)} \frac{1}{|x-y|^p} dx \leq \frac{4\pi}{3-p} (R+|y|)^{3-p}$$

für $y \in \mathbb{R}^3$, $R > 0$ und $p < 3$, wobei $B_R(0) \subset \mathbb{R}^3$.

Aufgabe 4: (2+2=4 Punkte)

Zeigen Sie, dass Folgendes gilt:

(a) Sei $y \in \mathbb{R}^n$ beliebig mit $n \geq 2$. Dann ist

$$\mathbb{R}^n \setminus \{y\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{|x-y|^{n-2}}$$

harmonisch.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}^2 \setminus \{y\} \ni x \mapsto \log|x-y|$ harmonisch ist.