Universität Siegen
Department Mathematik
AG Geomathematik
Univ.-Prof. Dr. V. Michel

19. November 2020

Übungen zur Vorlesung

Geomathematik

Wintersemester 2020/21
Blatt 3

Abgabe per E-Mail bis **Donnerstag, den 26. November 2020, 16:15 Uhr**.

Aufgabe 9: (4 Punkte)

Für eine Funktion $U \in \mathrm{C}^{(2)}(G)$, wobei $G \subset \mathbb{R}^3$ ein Gebiet mit $0 \notin G$ ist, definiert man die Kelvin-Transformierte als

$$U^*(x) := \frac{1}{|x|} U\left(\frac{x}{|x|^2}\right)$$

für alle $x \in \mathbb{R}^3$ mit $\frac{x}{|x|^2} \in G$. Zeigen Sie, dass dann

$$\Delta U^*(x) = \frac{1}{|x|^5} (\Delta U)\left(\frac{x}{|x|^2}\right)$$

gilt, wobei $(\Delta U)\left(\frac{x}{|x|^2}\right)$ so zu verstehen ist, dass erst ΔU bestimmt und dann $\frac{x}{|x|^2}$ eingesetzt wird.

Aufgabe 10: (4 Punkte)

Der Gauß'sche Mittelwertsatz gilt auch im $\mathbb{R}^1$. Formulieren Sie eine entsprechende analoge Aussage und beweisen Sie sie! Geben Sie außerdem eine allgemeine explizite Formel für alle harmonischen Funktionen auf einem Gebiet im $\mathbb{R}^1$ an.

Aufgabe 11: (4 Punkte)

Zeigen Sie: Ist $U \in \mathrm{C}^{(2)}\left(\overline{B_R(x^0)}\right)$ mit $R > 0$ und $B_R(x^0) \subset \mathbb{R}^3$, so gilt:

$$U\left(x^0\right) = \frac{1}{4\pi R^2} \int\limits_{S_R(x^0)} U(x) \, \mathrm{d}\omega(x) - \frac{1}{4\pi} \int\limits_{B_R(x^0)} \Delta U(x) \left(\frac{1}{|x - x^0|} - \frac{1}{R}\right) \, \mathrm{d}x.$$

(Anmerkung: Diese Aussage ist eine Verschärfung des Gauß'schen Mittelwertsatzes.)

<u>Aufgabe 12:</u> (4 Punkte)

Die Lotrichtung (engl. plumb-line) wird durch die (umgekehrte) Richtung des Gravitationsfelds gegeben. Formal definiert man

$$n(x) := -\frac{\nabla V(x)}{|\nabla V(x)|}$$

in allen $x \in \mathbb{R}^3$, in denen $|\nabla V(x)| \neq 0$, wobei V das Gravitationspotential ist. Nimmt man nun einen beliebigen, aber festen Punkt $x^0 \in \mathbb{R}^3$ mit $|\nabla V(x^0)| \neq 0$, so ist die "plumb-line" durch x^0 gegeben durch einen Weg $\varphi : I \to \mathbb{R}^3$ ($I \subset \mathbb{R}$ Intervall) mit $x^0 \in \varphi(I)$ und

$$\varphi'(s) = n(\varphi(s)) \quad \text{für alle } s \in I,$$

wobei der Parameter s die Bogenlänge ist. Zeigen Sie, dass die Krümmung der "plumb-line" Folgendes erfüllt:

$$\varphi''(s) = \left(|\nabla V|^{-1} \nabla^* |\nabla V|\right)\Big|_{\varphi(s)} ,$$

wobei ∇^* der Oberflächengradient zur Äquipotentialfläche $\{y \in \mathbb{R}^3 \big| V(y) = c\}$, $c = V(\varphi(s))$ fest, ist, d.h. $\nabla^* F = \nabla F - (n \cdot \nabla F)n$. (Hinweis: Da die Euklidische Norm $|\nabla V|$ eine Wurzel enthält, versuchen Sie, $\nabla^* |\nabla V|^2$ zu benutzen.)