Universität Siegen
Department Mathematik
AG Geomathematik
Univ.-Prof. Dr. V. Michel

26. November 2020

Übungen zur Vorlesung

Geomathematik

Wintersemester 2020/21
Blatt 4

Abgabe per E-Mail bis **Donnerstag, den 03. Dezember 2020, 16:15 Uhr**.

Aufgabe 13: (4 Punkte+2 Bonuspunkte)

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $U : G \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Wenn in allen Kugeln $B_R(x^0)$ mit $\overline{B_R(x^0)} \subset G$ die Ungleichung

$$U(x^0) \leq \frac{1}{\Omega_n R^n} \int\limits_{B_R(x^0)} U(x) \, \mathrm{d}x \tag{1}$$

gilt, wobei $\Omega_n = \int_{B_1(0)} 1 \, \mathrm{d}x$ das Volumen der Einheitskugel im $\mathbb{R}^n$ ist, dann nennt man U subharmonisch. Gilt stets "$\geq$" in (1), so heißt U superharmonisch.

a) Zeigen Sie (für $n = 3$): $\Delta U \geq 0$ in $G \Leftrightarrow U$ subharmonisch.

b) Zu welcher aus der Analysis bekannten Eigenschaft ist Subharmonizität im $\mathbb{R}^1$ äquivalent? (ohne Beweis)

Aufgabe 14: (4 Punkte)

Sei F messbar und beschränkt auf der regulären Fläche $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$. Dass das zugehörige Einfachschicht-Potential P_s auf $\mathbb{R}^3 \setminus \Sigma$ unendlich oft differenzierbar und harmonisch ist, ist analog zu bisherigen Betrachtungen bzw. folgt aus bekannten Sätzen der Analysis.

a) Zeigen Sie, dass P_s auf dem $\mathbb{R}^3$ auch beschränkt ist.

b) Um den Beweis, dass P_s auf dem $\mathbb{R}^3$ stetig bzw. stetig differenzierbar ist, analog zum Fall des Gravitationspotentials durchführen zu können, muss man zeigen, dass

$$\lim_{r \to 0+} \int\limits_{B_r(y) \cap \Sigma} \frac{1}{|x - y|} \, \mathrm{d}\omega(x) = 0 \tag{2}$$

für alle $y \in \mathbb{R}^3$. Der Rest ergibt sich dann durch Analogie. Weisen Sie daher (2) nach.

Aufgabe 15: (4 Punkte)

Sei F messbar und beschränkt auf der regulären Fläche $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$. Ferner sei P_d das zugehörige Doppelschicht-Potential. Zeigen Sie, dass $P_\mathrm{d}(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$ endlich ist.

Aufgabe 16: (4 Punkte)

Sei F messbar und beschränkt auf der regulären Fläche $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$. Zeigen Sie, dass die zugehörigen Einfach- und Doppelschicht-Potentiale regulär im Unendlichen sind.