Universität Siegen
Department Mathematik
AG Geomathematik
Univ.-Prof. Dr. V. Michel

3. Dezember 2020

Übungen zur Vorlesung

# Geomathematik

**Wintersemester 2020/21**
**Blatt 5**

Abgabe per E-Mail bis **Donnerstag, den 10. Dezember 2020, 16:15 Uhr**.

**Aufgabe 17:** (4 Punkte)

Sei $\Sigma$ eine reguläre Fläche, $F \in \mathrm{C}(\Sigma)$ eine gegebene Funktion und $x_0 \in \Sigma$ ein gegebener Punkt. Zeigen Sie: Wenn $F(x_0) = 0$ und $P_\mathrm{d}$ das zu $F$ gehörige Doppelschicht-Potential ist, dann ist $P_\mathrm{d}$ stetig in $x_0$.

**Aufgabe 18:** (1+3=4 Punkte)

Seien $D \subset \mathbb{R}^n$ und $E \subset \mathbb{R}^m$ kompakte und nicht-leere Mengen und $K : E \times D \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Der zugehörige Fredholm'sche Integraloperator sei definiert durch $\mathcal{T} : \mathrm{C}(D) \to \mathrm{C}(E)$ mit

$$(\mathcal{T}F)(x) := \int_D K(x,y)F(y)\ \mathrm{d}y, \quad x \in E,\ F \in \mathrm{C}(D).$$

a) Zeigen Sie, dass der Operator $\mathcal{T}$ beschränkt ist.

b) Zeigen Sie, dass $\mathcal{T}$ ein kompakter Operator ist. (Hinweis: Benutzen Sie den Satz von Arzelà-Ascoli.)

**Aufgabe 19:** (4 Punkte)

Seien $K \in \mathrm{C}^{(1)}([a,b] \times [a,b])$, $F \in \mathrm{C}^{(0)}([a,b])$ und $a < b$. Beweisen Sie, dass

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_a^x K(x,y)F(y)\ \mathrm{d}y = \int_a^x \frac{\partial K(x,y)}{\partial x} F(y)\ \mathrm{d}y + K(x,x)F(x)$$

für alle $x \in\, ]a,b[$.

**Aufgabe 20:** (4 Punkte)

Bestimmen Sie eine Lösung der Volterra-Integral-Gleichung erster Ordnung:

$$\int_0^x \left((x-y)^2 - 2\right) F(y)\, \mathrm{d}y = -4x, \quad x \geq 0 \ .$$

Nehmen Sie an, dass dieses Problem lösbar ist. (Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe 19.)