Universität Siegen
Department Mathematik
AG Geomathematik
Univ.-Prof. Dr. V. Michel

10. Dezember 2020

Übungen zur Vorlesung

Geomathematik

Wintersemester 2020/21
Blatt 6

Abgabe per E-Mail bis **Donnerstag, den 17. Dezember 2020, 16:15 Uhr**.

Aufgabe 21: (1+3=4 Punkte)

Seien $D \subset \mathbb{R}^n$ und $E \subset \mathbb{R}^m$ messbare Mengen. Zu $K \in \mathrm{L}^2(E \times D)$ sei der Fredholm'sche Integraloperator 1. Art $\mathcal{T} : \mathrm{L}^2(D) \to \mathrm{L}^2(E)$ definiert durch

$$(\mathcal{T}F)(x) \coloneqq \int_D K(x,y)F(y)\,\mathrm{d}y, \quad x \in E.$$

a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{T}F \in \mathrm{L}^2(E)$ für alle $F \in \mathrm{L}^2(D)$ und dass $\mathcal{T}$ ein beschränkter Operator ist.

b) Zeigen Sie, dass $\mathcal{T}$ ein kompakter Operator ist. (Hinweis: Sie dürfen benutzen, dass beschränkte Folgen in $\mathrm{L}^2(D)$ stets eine schwach konvergente Teilfolge haben.)

Aufgabe 22: (2+2=4 Punkte)

Die Einheitskreisscheibe

$$D \coloneqq \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1^2 + x_2^2 \le 1,\ x_3 = 0 \right\}$$

ist zwar keine geschlossene Fläche, aber wir können trotzdem auf ihr die Schichtpotentiale

$$P_\mathrm{s}(y) \coloneqq \int_D \frac{F(x)}{|x-y|}\,\mathrm{d}\omega(x), \qquad y \in \mathbb{R}^3,$$
$$P_\mathrm{d}(y) \coloneqq \int_D F(x)\frac{\partial}{\partial\nu(x)}\frac{1}{|x-y|}\,\mathrm{d}\omega(x), \qquad y \in \mathbb{R}^3,$$

definieren. Sei hier $F \equiv 1$.

a) Berechnen Sie P_s auf der x_3-Achse, d.h. $P_\mathrm{s}(0,0,y_3)$, und rechnen Sie nach, dass der, für reguläre Flächen aus der Vorlesung bekannte, Wert für den Sprung $\partial_{\nu+}P_\mathrm{s} - \partial_{\nu-}P_\mathrm{s}$ auch hier (im Punkt $(0,0,0)^\mathrm{T}$) angenommen wird, wobei $\nu = (0,0,1)^\mathrm{T}$.

b) Führen Sie die zu Teil a) entsprechenden Untersuchungen für $(P_\mathrm{d})_+$ und $(P_\mathrm{d})_-$ durch.

Aufgabe 23: (4 Punkte)

Beweisen Sie die Harnack'sche Ungleichung: Sei $U \in \mathrm{C}^{(2)}(B_R(0)) \cap \mathrm{C}(\overline{B_R(0)})$ harmonisch und nicht-negativ auf $B_R(0)$. Dann gilt:

$$R\frac{R-|x|}{(R+|x|)^2}U(0) \leq U(x) \leq R\frac{R+|x|}{(R-|x|)^2}U(0)$$

für alle $x \in B_R(0)$.

Aufgabe 24: (1+2+1=4 Punkte)

Zeigen Sie:

a) Die einzigen Funktionen, die auf dem ganzen $\mathbb{R}^3$ harmonisch und nicht-negativ sind, sind die konstanten Funktionen (mit nicht-negativer Konstante).

b) Ist $G \subset \mathbb{R}^3$ ein Gebiet und erfüllt eine stetige Funktion $U : G \to \mathbb{R}$ auf jeder Kugel $\overline{B_R(x^0)} \subset G$ die Gauß'sche Mittelwerteigenschaft, also

$$U(x^0) = \frac{1}{4\pi R^2}\int_{S_R(x^0)} U(x)\ \mathrm{d}\omega(x) = \frac{3}{4\pi R^3}\int_{B_R(x^0)} U(x)\ \mathrm{d}x,$$

dann ist U harmonisch auf G (Hinweis: Sehen Sie nach, was für den Beweis von Maximumprinzip I wirklich erforderlich war).

c) Jede Folge von, auf einem Gebiet harmonischen, Funktionen, die gleichmäßig konvergiert, hat auch einen harmonischen Limes.