Universität Siegen
Department Mathematik
AG Geomathematik
Univ.-Prof. Dr. V. Michel

17. Dezember 2020

Übungen zur Vorlesung

Geomathematik

Wintersemester 2020/21
Blatt 7

Abgabe per E-Mail bis **Donnerstag, den 14. Januar 2021, 16:15 Uhr**.

Aufgabe 25: (4 Punkte)

Berechnen Sie die Terme. Die Angabe eines Lösungswegs ist nicht erforderlich.

$$
\begin{array}{cccccc}
\frac{\partial}{\partial\varphi}\varepsilon^r, & \frac{\partial}{\partial t}\varepsilon^r, & \frac{\partial}{\partial\varphi}\varepsilon^\varphi, & \frac{\partial}{\partial t}\varepsilon^\varphi, & \frac{\partial}{\partial\varphi}\varepsilon^t, & \frac{\partial}{\partial t}\varepsilon^t \\
\varepsilon^r\cdot\frac{\partial}{\partial\varphi}\varepsilon^r, & \varepsilon^r\cdot\frac{\partial}{\partial\varphi}\varepsilon^\varphi, & \varepsilon^r\cdot\frac{\partial}{\partial\varphi}\varepsilon^t, & \varepsilon^\varphi\cdot\frac{\partial}{\partial\varphi}\varepsilon^r, & \varepsilon^\varphi\cdot\frac{\partial}{\partial\varphi}\varepsilon^\varphi, & \varepsilon^\varphi\cdot\frac{\partial}{\partial\varphi}\varepsilon^t \\
\varepsilon^t\cdot\frac{\partial}{\partial\varphi}\varepsilon^r, & \varepsilon^t\cdot\frac{\partial}{\partial\varphi}\varepsilon^\varphi, & \varepsilon^t\cdot\frac{\partial}{\partial\varphi}\varepsilon^t, & \varepsilon^r\cdot\frac{\partial}{\partial t}\varepsilon^r, & \varepsilon^r\cdot\frac{\partial}{\partial t}\varepsilon^\varphi, & \varepsilon^r\cdot\frac{\partial}{\partial t}\varepsilon^t \\
\varepsilon^\varphi\cdot\frac{\partial}{\partial t}\varepsilon^r, & \varepsilon^\varphi\cdot\frac{\partial}{\partial t}\varepsilon^\varphi, & \varepsilon^\varphi\cdot\frac{\partial}{\partial t}\varepsilon^t, & \varepsilon^t\cdot\frac{\partial}{\partial t}\varepsilon^r, & \varepsilon^t\cdot\frac{\partial}{\partial t}\varepsilon^\varphi, & \varepsilon^t\cdot\frac{\partial}{\partial t}\varepsilon^t
\end{array}
$$

Aufgabe 26: (4 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass für die Legendre-Polynome gilt:

$$P_k(t) = \sum_{m=0}^{\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor} (-1)^m \frac{(2k-2m)!}{2^k m!(k-m)!(k-2m)!}\, t^{k-2m},$$

wobei $\lfloor\cdot\rfloor$ für die abrundende Gauß-Klammer steht.

b) Bestimmen Sie mit der Formel aus Teil a) die Legendre-Polynome $P_0,\ P_1$ und P_2.

Aufgabe 27: (4 Punkte)

Seien $Y_n,\ Y_m \in \mathrm{C}^{(2)}(\Omega)$ Eigenfunktionen des Beltrami-Operators Δ^* zu den Eigenwerten $-n(n+1)$ bzw. $-m(m+1)$ mit $n, m \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie: Wenn $n \neq m$, dann ist $\langle Y_n, Y_m\rangle_{\mathrm{L}^2(\Omega)} = 0$. (Hinweis: Wenden Sie die 2. Green'sche Identität auf die IDP-Lösungen zu den Randwerten Y_n und Y_m an.)

Aufgabe 28: (4 Punkte)

Betrachten Sie $Q_n(t) \coloneqq (t^2-1)^n$ und $(t^2-1)Q_n'(t)$ und leiten Sie Letzteres $(n+1)$-mal ab. Benutzen Sie diesen Ansatz, um zu zeigen, dass die Legendre-Polynome die Rodriguez-Formel

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} (t^2 - 1)^n, \quad t \in [-1, 1],$$

$n \in \mathbb{N}_0$, erfüllen.