Universität Siegen
Department Mathematik
AG Geomathematik
Univ.-Prof. Dr. V. Michel

14. Januar 2021

Übungen zur Vorlesung

Geomathematik

Wintersemester 2020/21
Blatt 8

Abgabe per E-Mail bis **Donnerstag, den 21. Januar 2021, 16:15 Uhr**.

Aufgabe 29: (3+1=4 Punkte)

Das so genannte Konzentrationsproblem auf der Sphäre sieht wie folgt aus: Unter allen $F \in \mathrm{Harm}_{0\ldots N}(\Omega)$, d.h. allen $F : \Omega \to \mathbb{R}$ der Form

$$F(\xi) = \sum_{n=0}^{N} \sum_{j=-n}^{n} \langle F, Y_{n,j} \rangle_{\mathrm{L}^2(\Omega)} Y_{n,j}(\xi), \quad \xi \in \Omega,$$

suchen wir ein F, das den Ausdruck

$$\lambda_R(F) := \frac{\|F\|^2_{\mathrm{L}^2(R)}}{\|F\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)}}$$

maximiert. Hierbei ist $R \subset \Omega$ messbar. Zeigen Sie:

a) Es gibt eine Orthonormalbasis $F_1, \ldots, F_d$ mit $d := (N+1)^2$ von $\left(\mathrm{Harm}_{0\ldots N}(\Omega), \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathrm{L}^2(\Omega)}\right)$, so dass $\lambda_R(F_1) \geq \cdots \geq \lambda_R(F_d)$, wobei eine Matrix M existiert, so dass für jede Funktion F_k ihr Koeffizientenvektor $\left(\langle F_k, Y_{n,j} \rangle_{\mathrm{L}^2(\Omega)}\right)_{n=0,\ldots,N,\ j=-n,\ldots,n}$ ein Eigenvektor von M zum Eigenwert $\lambda_R(F_k)$ ist. (Geben Sie auch eine Formel für die Komponenten von M an).

b) Ist $R = \left\{\xi \in \Omega \,\middle|\, \xi \cdot \varepsilon^3 \geq b\right\}$, $b \in]-1, 1[$ fest, eine sphärische Kappe um den Nordpol, so hat M eine Blockstruktur, wenn die $Y_{n,j}$ die „fully normalized spherical harmonics“ sind.

Aufgabe 30: (4 Punkte)

a) Rechnen Sie nach, dass der Laplace-Operator in 2-dimensionalen Kreiskoordinaten $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ dargestellt werden kann als

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}$$

für zweimal stetig differenzierbare Funktionen U.

b) Verwenden Sie den Separationsansatz $U(x, y) = F(r)Y(\varphi)$ und leiten Sie eine Darstellung für die allgemeine Lösung der Laplace-Gleichung $\Delta U = 0$ auf einer Kreisscheibe $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 \leq R^2\right\}$ im $\mathbb{R}^2$ her.

Aufgabe 31: (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Legendre-Polynome die Rekursionsformel

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllen (Hinweis: Betrachten Sie die Ableitung der Erzeugenden Funktion).

Aufgabe 32: (1+3=4 Punkte)

a) Rechnen Sie die folgende Gleichung für die assoziierten Legendre-Funktionen $P_{n,j}$ nach:

$$P_{n,j}(t) = \sqrt{1-t^2}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}P_{n,j-1}(t) + (j-1)\,\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,P_{n,j-1}(t),$$

$t \in]-1, 1[,\ n \in \mathbb{N}_0,\ j = 1, \ldots, n.$

b) Zeigen Sie dann, dass

$$\int_{-1}^{1} \left(P_{n,j}(t)\right)^2 \,\mathrm{d}t = \frac{2}{2n+1}\frac{(n+j)!}{(n-j)!}$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $j = 1, \ldots, n$.