Universität Siegen
Department Mathematik
AG Geomathematik
Univ.-Prof. Dr. V. Michel

21. Januar 2021

Übungen zur Vorlesung

Geomathematik

Wintersemester 2020/21
Blatt 8

Abgabe per E-Mail bis **Donnerstag, den 28. Januar 2021, 16:15 Uhr**.

Für Funktionen $F \in \mathrm{C}(\Omega)$ und $G \in \mathrm{C}^{(1)}(\Omega)$ seien die Operatoren

$$\begin{aligned} o_\xi^{(1)} F(\xi) &\coloneqq \xi F(\xi), \quad \xi \in \Omega, \\ o_\xi^{(2)} G(\xi) &\coloneqq \nabla_\xi^* G(\xi), \quad \xi \in \Omega, \\ o_\xi^{(3)} G(\xi) &\coloneqq \xi \times \nabla_\xi^* G(\xi) \eqqcolon \mathrm{L}_\xi^* G(\xi), \quad \xi \in \Omega, \end{aligned}$$

definiert, wobei ∇^* der Oberflächengradient ist. Ferner sei $0_1 \coloneqq 0$ und $0_2 \coloneqq 0_3 \coloneqq 1$. Die Morse-Feshbach-Vektor-Kugelflächenfunktionen $y_{n,j}^{(i)}$ sind definiert durch

$$y_{n,j}^{(i)}(\xi) \coloneqq \left\| o^{(i)} Y_{n,j} \right\|_{\mathrm{L}^2(\Omega,\mathbb{R}^3)}^{-1} o_\xi^{(i)} Y_{n,j}(\xi), \quad \xi \in \Omega,$$

für $i \in \{1,2,3\}$, $n \in \mathbb{N}_0$ mit $n \geq 0_i$ und $j = -n, \ldots, n$. Hierbei ist

$$\langle f, g \rangle_{\mathrm{L}^2(\Omega,\mathbb{R}^3)} \coloneqq \int_\Omega f(\xi) \cdot g(\xi) \, \mathrm{d}\omega(\xi)$$

für quadratintegrable Vektorfelder $f, g : \Omega \to \mathbb{R}^3$ und $f(\xi) \cdot g(\xi)$ ist das Euklidische Skalarprodukt. Ferner ist

$$\left\| o^{(1)} Y_{n,j} \right\|_{\mathrm{L}^2(\Omega,\mathbb{R}^3)} = 1 \text{ und } \left\| o^{(i)} Y_{n,j} \right\|_{\mathrm{L}^2(\Omega,\mathbb{R}^3)} = \sqrt{n(n+1)} \text{ für } i \geq 2. \tag{1}$$

Aufgabe 33: (4 Punkte)

Leiten Sie explizite Formeln für $Y_{0,0}$, $Y_{1,-1}$, $Y_{1,0}$ und $Y_{1,1}$ und die vektoriellen Entsprechungen $y_{n,j}^{(i)}$ her – jeweils in Polarkoordinaten und kartesischen Koordinaten $\xi_1 = \sqrt{1-t^2}\cos\varphi$, $\xi_2 = \sqrt{1-t^2}\sin\varphi$, $\xi_3 = t$. Vereinfachen Sie die Ergebnisse weitestgehend. (Hinweis zum Nachprüfen Ihrer Resultate: Alle Funktionen sind algebraische Polynome in ξ_1, ξ_2 und ξ_3.)

Aufgabe 34: (2+2=4 Punkte)

a) Warum gilt punktweise für das Euklidische Skalarprodukt, dass

$$y_{n,j}^{(i_1)}(\xi) \cdot y_{n,j}^{(i_2)}(\xi) = 0 \quad \forall \xi \in \Omega$$

für alle $n \geq 1,\ j = -n, \ldots, n$, wenn $i_1 \neq i_2$ gilt?

b) Zeigen Sie, dass für alle $a, b, c, d \in \mathbb{R}^3$ die folgende Lagrange-Identität gilt:

$$(a \times b) \cdot (c \times d) = (a \cdot c)(b \cdot d) - (b \cdot c)(a \cdot d)$$

Aufgabe 35: (4 Punkte)

Rechnen Sie nach, dass

$$\left\langle y_{n,j}^{(i)}, y_{m,k}^{(l)} \right\rangle_{\mathrm{L}^2(\Omega,\mathbb{R}^3)} = 0,$$

wenn $(i, n, j) \neq (l, m, k)$. (Hinweis: Verwenden Sie Teile der anderen Aufgaben auf diesem Blatt sowie die Identität $\mathrm{L}^* \cdot \nabla^* = 0$ auf $\mathrm{C}^{(2)}(\Omega)$, die aus der Kontruktiven Approximation bekannt ist).

Aufgabe 36: (4 Punkte)

Rechnen Sie nach, dass (1) gilt. (Hinweis: Verwenden Sie eine der Green'schen *Oberflächen-*Identitäten).

Bonusaufgabe: (4 Bonuspunkte)

Zeigen Sie die folgende Variante des Satzes von Stokes auf der Sphäre (als Folgerung des Satzes von Stokes): Sei $\Gamma \subset \Omega$ eine hinreichend glatte Fläche, auf der der Satz von Stokes gilt, mit Tangentialeinheitsvektorfeld τ auf dem Rand $\partial\Gamma$ mit positivem Umlaufsinn. Ist $f \in \mathrm{C}^{(1)}(\Gamma, \mathbb{R}^3)$, so gilt

$$\int_\Gamma \mathrm{L}_\xi^* \cdot f(\xi)\ \mathrm{d}\omega(\xi) = \int_{\partial\Gamma} f(\xi) \cdot \tau(\xi)\ \mathrm{d}\sigma(\xi),$$

wobei L^* der Oberflächenrotationsgradient (s. oben) ist und $\mathrm{L}^* \cdot f := \sum_{j=1}^{3} (\varepsilon^j \cdot \mathrm{L}^*)(f \cdot \varepsilon^j)$.