Universität Siegen
Department Mathematik
AG Geomathematik
Univ.-Prof. Dr. V. Michel

28. Januar 2021

Übungen zur Vorlesung

Geomathematik

Wintersemester 2020/21
Blatt 10

Abgabe per E-Mail bis **Donnerstag, den 4. Februar 2021, 16:15 Uhr**.

Aufgabe 37: (3+1=4 Punkte)

Verwenden Sie den Separationsansatz $U(x) = F(r)G(\varphi)$ bzgl. Polarkoordinaten auf dem Kreis $B_R(0) \subset \mathbb{R}^2$, um die Helmholtz-Gleichung

$$\Delta U + \omega^2 U = 0, \quad \omega \in \mathbb{R}^+ \text{ fest},$$

zu lösen. Geben Sie die allgemeine Lösung für G an und zeigen Sie, dass alle

$$J_k(s) := \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{(k+r)!r!} \left(\frac{s}{2}\right)^{2r+k}, \quad s \in \mathbb{R}^+,$$

mit $k \in \mathbb{N}_0$ als Lösungen für F mit $F(r) = J_k(\omega r)$ geeignet sind.

Aufgabe 38: (4 Punkte)

Zeigen Sie: Wenn V die Bedingungen zur Lösbarkeit des inversen Gravimetrie-Problems erfüllt, dann ist die eindeutige Lösung $F \in \mathrm{C}^{(2)}(\overline{B_R(0)})$ von

$$G \int_{B_R(0)} \frac{F(x)}{|x - \cdot|} \, \mathrm{d}x = V \text{ in } \mathbb{R}^3 \setminus \overline{B_R(0)}, \; \Delta_x(F(x)\,|x|^{-p}) = 0 \text{ in } B_R(0),$$

$p \in \mathbb{R}_0^+$ fest, gegeben durch

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+p+3) \frac{(R+\varepsilon)^n}{R^{2n+p+3}} \frac{2n+1}{4\pi G} \, |x|^{n+p} \sum_{j=1}^{2n+1} \left\langle V|_{S_{R+\varepsilon}(0)}, Y_{n,j}^{R+\varepsilon} \right\rangle_{\mathrm{L}^2(S_{R+\varepsilon}(0))} Y_{n,j}\left(\frac{x}{|x|}\right),$$

wobei die Reihe in $\mathrm{L}^2(B_R(0))$ konvergiert.

Aufgabe 39: (4 Punkte)

Sei eine Kugelschale gegeben durch

$$0 \leq \tau \leq |x| \leq \tau + \delta \leq R,\ \ \delta > 0.$$

Wenn F^{L} eine zweimal integrierbare Dichtefunktion mit der Form

$$F^{\mathrm{L}}(x) = \begin{cases} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \sum\limits_{j=1}^{2n+1} F^{\mathrm{L}}_{n,j} Y_{n,j}\left(\frac{x}{|x|}\right) & \text{innerhalb der Kugelschale,} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und V das dazugehörige Gravitationspotential ist, dann gilt

$$F^{\mathrm{L}}_{n,j} = \frac{(2n+1)(n+3)}{4\pi G} \frac{(R+\varepsilon)^n}{(\tau+\delta)^{n+3} - \tau^{n+3}} \left\langle V|_{S_{R+\varepsilon}(0)}, Y^{R+\varepsilon}_{n,j} \right\rangle_{\mathrm{L}^2(S_{R+\varepsilon}(0))}.$$

Aufgabe 40: (4 Punkte)

Seien $(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{X}})$ und $(\mathcal{Y}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{Y}})$ Hilberträume und $\mathcal{T} \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. Zeigen Sie: Die bijektive Abbildung $\mathcal{T}\big|_{(\ker\mathcal{T})^{\perp}} : (\ker\mathcal{T})^{\perp} \to \mathcal{T}(\mathcal{X})$ hat genau dann eine stetige Inverse, wenn das Bild $\mathcal{T}(\mathcal{X})$ abgeschlossen in $\mathcal{Y}$ ist.