Universität Siegen
Department Mathematik
AG Geomathematik
Univ.-Prof. Dr. V. Michel
M.Sc. Roger Telschow

08. Juli 2014

Übungen zur Vorlesung

# Geomathematik

**Sommersemester 2014**
**Blatt 10**

Abgabe am **Dienstag, dem 15. Juli 2014** zu Beginn der Vorlesung.

**Aufgabe 37:** (4 Punkte)

Der Strahlparameter $p$ sei definiert durch $p = \frac{r}{V(r)} \sin i$, wobei $r$ der Radius ist, $V(r)$ die Geschwindigkeit in Abhängigkeit vom Radius und $i \in [0, \pi]$ der Einfallswinkel (Inzidenzwinkel) des Strahls. Eine "Low Velocity Zone" (LVZ) im Erdinnern ist dadurch gekennzeichnet, dass der Faktor $\frac{r}{V(r)}$ größer wird, wenn der Radius $r$ kleiner wird. Erklären Sie, warum die Existenz einer LVZ zu einer Schattenzone führt, also einer Zone auf der Erdoberfläche, in der keine Erdbebenwellen empfangen werden können.

**Aufgabe 38:** (4 Punkte)

Sei

$$U(x, \omega) := e^{-i\omega\Psi(x)} \sum_{n=0}^{\infty} (i\omega)^{-n} \xi_n(x); \quad i^2 = -1;$$

wobei $\Psi, \xi_n \in \mathrm{C}^{(2)}(\mathcal{E}, \mathbb{R})$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\xi_0(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathcal{E} \subset \mathbb{R}^3$. Wir nehmen an, dass die Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} (i\omega)^{-n} \frac{\partial^k}{\partial x_j^k} \xi_n; \quad j \in \{1, 2, 3\}, k \in \{0, 1, 2\};$$

gleichmäßig konvergent sind. Beweisen Sie, dass die Anwendung dieses Ansatzes auf die Helmholtz-Gleichung

$$\Delta U + \frac{\omega^2}{(V(r))^2} U = 0$$

zu den folgenden Differentialgleichungen führt ($\xi_{-1} := 0$):

$$|\nabla\Psi|^2 = \frac{1}{V^2},$$

$$2(\nabla\Psi) \cdot (\nabla\xi_n) + \xi_n \Delta\Psi = \Delta\xi_{n-1}, \quad n \geq 0.$$

**Aufgabe 39:** (4 Punkte)

Sei $\Psi$ eine Lösung der Eikonal-Gleichung

$$|\nabla\Psi(x)|^2 = \frac{1}{(V(|x|))^2} \ .$$

Der Vektor $\mathbf{p}$ sei definiert durch $\mathbf{p} := V\nabla\Psi = \frac{\nabla\Psi}{|\nabla\Psi|}$. $\mathbf{p}$ ist also ein Einheitsnormalenvektor zu der Oberfläche, die durch $\Psi = \text{const}$ gegeben ist. Ein Strahl ist eine Kurve $s \mapsto x(s)$, parametrisiert durch die Bogenlänge $s$ mit $\frac{dx(s)}{ds} = \mathbf{p}$.

Zeigen Sie, dass die Langsamkeit $S = \frac{1}{V}$ die folgenden Gleichungen entlang eines Strahls erfüllt:

$$\frac{d\Psi(x(s))}{ds} = S(|x(s)|), \quad \frac{d}{ds}(S\mathbf{p})(x(s)) = \nabla_x S(|x(s)|) \ .$$

**Aufgabe 40:** (4 Punkte)

Beweisen Sie, dass für radial-symmetrische Erdmodelle

$$\frac{d}{ds}\left(x(s) \wedge (S\mathbf{p})(x(s))\right) = 0$$

und folglich

$$\frac{d}{ds}\left(S(|x(s)|)|x(s)| \sin i(s)\right) = 0$$

entlang eines Strahls gilt, wobei $i(s) = \measuredangle(\varepsilon^r, \mathbf{p}(x(s)))$ der Inzidenzwinkel ist. Die Größe $p := Sr \sin\ i$, $r = |x|$, die entlang des Strahls konstant ist, wird Strahlparameter genannt.