Universität Siegen
Department Mathematik
AG Geomathematik
Univ.-Prof. Dr. V. Michel
M.Sc. Roger Telschow

15. April 2014

Übungen zur Vorlesung

Geomathematik

Sommersemester 2014
Blatt 1

Abgabe bis **Mittwoch, den 23. April 2014**, 12:00 Uhr ins Postfach der AG oder via E-Mail.

Aufgabe 1: (4 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass die Vektoren ε^r, ε^φ und ε^t ein orthonormales System im $\mathbb{R}^3$ bilden und dass $\varepsilon^r \wedge \varepsilon^\varphi = \varepsilon^t$.

(b) Sei $F \in C^{(1)}(\Omega)$. Zeigen Sie, dass die Vektoren $\xi F(\xi)$, $\nabla^*_\xi F(\xi)$ und $L^*_\xi F(\xi)$ für festes $\xi \in \Omega$ paarweise orthogonal sind, wobei

$$\nabla^* = \varepsilon^\varphi \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \varepsilon^t \sqrt{1-t^2} \frac{\partial}{\partial t}$$

und

$$L^*_\xi G(\xi) = \xi \wedge \nabla^*_\xi G(\xi),\ \xi \in \Omega,\ G \in C^{(1)}(\Omega).$$

Aufgabe 2: (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass der Gradient ∇, definiert auf $C^{(1)}(D)$, $D \subset \mathbb{R}^3$, dargestellt werden kann als

$$\nabla = \varepsilon^r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \nabla^*.$$

Aufgabe 3: (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass der Oberflächenrotationsgradient L^*, definiert in Aufgabe 1, dargestellt werden kann als

$$L^* = -\varepsilon^\varphi \sqrt{1-t^2} \frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon^t \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \frac{\partial}{\partial \varphi}.$$

Aufgabe 4: (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass der Beltrami-Operator Δ^*, definiert auf $C^{(2)}(\Omega)$ als

$$\Delta^* = \frac{\partial}{\partial t}(1-t^2)\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{1-t^2}\left(\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)^2,$$

die folgende Gleichung erfüllt:

$$\nabla^* \cdot \nabla^* = \Delta^*.$$