Universität Siegen
Department Mathematik
AG Geomathematik
Univ.-Prof. Dr. V. Michel
M.Sc. Roger Telschow

23. April 2014

Übungen zur Vorlesung

Geomathematik

Sommersemester 2014
Blatt 2

Abgabe am **Dienstag, dem 06. Mai 2014** zu Beginn der Vorlesung.

Aufgabe 5: (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass der Oberflächenrotationsgradient L^* die folgende Gleichung erfüllt:
$L^* \cdot L^* = \Delta^*$, wobei Δ^* der Beltrami-Operator ist.

Aufgabe 6: (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass

$$\dim(\mathrm{Hom}_n(\mathbb{R}^3)) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Aufgabe 7: (4 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}_0$ gegeben und sei $Y_n \in \mathrm{Harm}_n(\Omega)$ eine beliebige Kugelflächenfunktion. Zeigen Sie, dass $H_n : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ und $H_{-n-1} : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$\begin{aligned} H_n(x) &= r^n Y_n(\xi),\ x = r\xi \in \mathbb{R}^3, r = |x|\,, \\ H_{-n-1}(x) &= r^{-n-1} Y_n(\xi),\ x = r\xi \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\},\ r = |x|\,, \end{aligned}$$

harmonisch sind.

Aufgabe 8: (4 Punkte)

Sei $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein beliebiger Hilbertraum.

a) Beweisen Sie die Cauchy–Schwarz'sche Ungleichung:

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \; \|y\|$$

für alle $x, y \in H$.

b) Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, die in der $\langle \cdot, \cdot \rangle$–Topologie gegen $x \in H$ konvergiert, wird stark konvergent genannt. Beweisen Sie, dass aus starker Konvergenz schwache Konvergenz folgt, also

$$\langle y, x_n \rangle \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \langle y, x \rangle \quad \forall y \in H.$$