Universität Siegen
Department Mathematik
AG Geomathematik
Univ.-Prof. Dr. V. Michel
M.Sc. Roger Telschow

13. Mai 2014

Übungen zur Vorlesung

Geomathematik

Sommersemester 2014
Blatt 4

Abgabe am **Dienstag, dem 20. Mai 2014** zu Beginn der Vorlesung.

Aufgabe 13: (4 Punkte)

Sei $G \in \mathrm{L}^1([-1,1])$. Beweisen Sie, dass

$$(G * Y_n)(\zeta) = 2\pi \int_{-1}^{1} G(t) P_n(t) \, \mathrm{d}t \; Y_n(\zeta), \quad \zeta \in \Omega,$$

von jeder Kugelflächenfunktion $Y_n \in \mathrm{Harm}_n(\Omega)$, $n \in \mathbb{N}_0$ erfüllt wird.

Aufgabe 14: (4 Punkte)

Beweisen Sie, dass die folgenden Gleichungen für alle $F \in \mathrm{C}^{(2)}(\Omega)$ gelten:

$$\begin{aligned} L^*_\xi \cdot \left(\nabla^*_\xi F(\xi)\right) &= 0, \quad \xi \in \Omega, \\ \nabla^*_\xi \cdot \left(L^*_\xi F(\xi)\right) &= 0, \quad \xi \in \Omega. \end{aligned}$$

Aufgabe 15: (4 Punkte)

Sei $F \in \mathrm{C}^{(2)}(\mathbb{R}^3 \backslash \{0\}, \mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass die Hessematrix von F dargestellt werden kann als

$$\begin{aligned} (\nabla_x \otimes \nabla_x) F(x) &= \xi \otimes \xi \frac{\partial^2}{\partial r^2} F(r\xi) + \xi \otimes \nabla^*_\xi \left(-\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right) F(r\xi) \\ &+ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} (I - \xi \otimes \xi) F(r\xi) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} \left(\nabla^*_\xi F(r\xi)\right) \otimes \xi \\ &+ \frac{1}{r^2} \nabla^*_\xi \otimes \nabla^*_\xi F(r\xi), \end{aligned}$$

wobei $x = r\xi \in \mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$, $r \in \mathbb{R}^+$ und $\xi \in \Omega$. I ist die 3×3-Einheitsmatrix.

Aufgabe 16: (4 Punkte)

Angenommen $F \in \mathrm{C}^{(2)}(\mathbb{R}^3 \backslash \{0\}, \mathbb{R})$ lässt sich darstellen als

$$F(r\xi) = G(r)Y(\xi) \text{ mit } r \in \mathbb{R}^+, \xi \in \Omega,$$

wobei $G \in C^{(2)}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ und $Y \in C^{(2)}(\Omega, \mathbb{R})$.

Zeigen Sie, dass die Multiplikation der Hessematrix von F mit $\xi \in \Omega$ Folgendes ergibt:

$$((\nabla_x \otimes \nabla_x) F(x)) \xi = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} G(r) o_\xi^{(1)} Y(\xi) + \frac{1}{r} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} G(r) - \frac{1}{r} G(r) \right) o_\xi^{(2)} Y(\xi),$$

wobei $x = r\xi$, $r \in \mathbb{R}^+$ und $\xi \in \Omega$.